ALGEBRA

Bruchgleichungen

Trainingsheft für Schüler

Teil 1

Bruchgleichungen die zu linearen Gleichungen führen

Es kommen keine echten quadratischen Gleichungen vor

und auch kleine Gleichungen mit Parametern.

Datei Nr. 12145

Friedrich W. Buckel

Stand: 7. Januar 2018

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort:

Dieser Text ist ein **Trainingsheft für Schüler**. Er beinhaltet Methoden zum Lösen von Bruchgleichungen, die auf Endgleichungen führen, die nicht quadratisch sind, denn die Lösungsformeln für quadratische Gleichungen stehen in der Regel in Klasse 8 noch nicht zur Verfügung.

Bruchgleichungen, die auf quadratische Endgleichungen führen, werden in 12240 vorgestellt.
Bruchgleichungen mit Formvariablen (Parametern) gibt es unter der Nummer 12146.

Zum Inhalt:

Im 1. Abschnitt werden von Seite 7 bis 24 die Methoden besprochen, mit denen man Bruchgleichungen löst. Die Voraussetzungen dazu stehen in den Texten 12110 und 12111 (Bruchterme: Definitionsbereiche, Faktorisieren usw.)

Dann folgen 30 Mustergleichungen, in denen alles gezeigt wird, was vorkommt. Anschließend gibt es 24 Trainingsgleichungen, an denen man sich selbst erproben kann. Diese sind ein wenig kürzer gehalten, was die Lösungen betrifft, denn in den zahlreichen Beispielen zuvor wurden ja alle Verfahren gründlich erklärt.

Als Grundmenge für die Zahlen wird in der Regel die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen (Bruchzahlen) verwendet, denn bis Klasse 8 steht die den Schülern zur Verfügung.

Die Texte zum Thema Bruchterme sind:

12110	Bruchterme 1	(Definitionsbereich, Kürzen, Erweitern)
12111	Bruchterme 2	(Addition, Subtraktion)
12112	Bruchterme 3	Trainingsaufgaben aus diesen zwei Dateien

12145	Bruchgleichungen 1	(ohne quadratische Gleichungen)
12146	Bruchgleichungen 3	(mit Paramatern)
12240	Bruchgleichungen 2	(die auf quadratische Gleichungen führen)

Inhalt

1 Übersicht

Als (echte) **Bruchgleichungen** bezeichnet man in der Regel Gleichungen, bei denen x im Nenner eines Bruches vorkommt:

$$\frac{2}{x} + x = 3 \qquad \text{oder} \qquad \frac{4}{x+2} - \frac{3}{x-1} = \frac{2}{x}$$

Dagegen ist $\frac{x+3}{4} - \frac{x}{5} = 2$ keine „echte" Bruchgleichung.

Sie enthält zwar Brüche, aber im Nenner steht kein x.

Die Gleichung $\frac{2}{\sqrt{x}} = 5$ bezeichnet man nicht als Bruchgleichung sondern als Wurzelgleichung, weil die Quadratwurzel darin höhere Anforderungen stellt.

Beim Lösen von Bruchgleichungen sind zwei Fähigkeiten von großer Bedeutung:

- Das Aufstellen des Definitionsbereichs
  Dies wird sehr ausführlich im Text 12111 (Grundlagen für Bruchterme) gezeigt.

- Das Ermitteln des gemeinsamen Nenners der Bruchterme in der Gleichung.
  Dazu wiederum ist es notwendig, dass man weiß, wie man Terme faktorisiert.
  Auch dies wurde in 12111 bei der Bestimmung des Definitionsbereichs gezeigt.

Den Einsatz dieser Methoden sieht man im folgenden Theorieabschnitt, in dem erklärt wie, nach welchen Methoden man Bruchgleichungen löst.

2. Grundlagen und Methodenübersicht

2.1 Mit welchen Methoden löste man Bruchgleichungen?

WICHTIG

Eine Gleichung löst man, indem man mit bestimmten Umformungen aus komplizierten Gleichungen neue, einfachere Gleichungen erstellt. Diese Umformungen müssen aber garantieren, dass die vereinfachte Gleichung dieselben Lösungszahlen besitzt.

Dies macht man so lange, bis am Ende eine so einfache Gleichung übrig bleibt, der man die Lösungszahl(en) ansieht. Diese gelten dann auch für die Anfangsgleichung!

Merke: Gleichungen, welche dieselbe Lösungsmenge besitzen, heißen äquivalent (gleichwertig). Eine Umformung, die eine Gleichung in eine äquivalente Gleichung umformt, heißt eine **Äquivalenzumformung**!

Liste der Äquivalenzumformungen (die man also anwenden darf)

1. Addition oder Subtraktion einer Zahl auf beiden Seiten einer Gleichung.

Beispiel:

	$15x-4=10x+11$	(1)
Addition von 4 auf beiden Seiten erzeugt:	$15x-4\ \boxed{+4} = 10x+11\ \boxed{+4}$	
also	$15x=10x+15$	(2)

Die Zahl $\boxed{3}$ ist Lösung von (1) **und** von (2), was die folgende Probe zeigt:

Die Zahl 3 ist Lösung von (1): $\underbrace{15\cdot\boxed{3}-3}_{42}=\underbrace{10\cdot\boxed{3}+12}_{42}$.

Die Zahl 3 ist Lösung von (2): $\underbrace{15\cdot\boxed{3}}_{45}=\underbrace{10\cdot\boxed{3}+15}_{45}$

2. Addition oder Subtraktion eines Terms auf beiden Seiten einer Gleichung.

Wir gehen von Gleichung (2) aus:	$15x=10x+15$	(2)
und subtrahieren beidseitig 10x:	$5x=15$	(3)

Die Zahl $\boxed{3}$ ist auch Lösung von (3): $\underbrace{5\cdot\boxed{3}}_{15}=15$

3. Multiplikation oder Division mit einer Zahl ungleich 0 auf beiden Seiten.

Wir gehen von Gleichung (3) aus:	$5x=15$	(3)
und dividieren die Gleichung durch 5:	$x=3$	(4)

Die Zahl $\boxed{3}$ ist auch Lösung von (4): $\boxed{3}=3$

Kennt man die Lösung der **Endgleichung** (4) (es ist die Zahl 3), dann weiß man, dass auch die **Anfangsgleichung** (1) die Lösungszahl 3 hat.

4. Zusammenfassen der Terme auf jeder Seite

Selbstverständlich ändert sich die Lösungsmenge auch nicht, wenn man innerhalb einer Seite der Gleichung Zusammenfassungen vornimmt, wie Addition usw.

Folgende Umformungen sind KEINE Äquivalenzumformungen

1. Multiplikation einer Gleichung mit 0 - ist verboten

Wir betrachten die Gleichung $4 \cdot x = 8$ (5)

sie hat die Lösungszahl 2: $4 \cdot \boxed{2} = 8$

Jetzt schauen wir uns an, was passiert, wenn man diese Gleichung mit 0 multipliziert:

Also: $\boxed{0} \cdot 4 \cdot x = \boxed{0} \cdot 8$

Oder kürzer: $0 \cdot x = 0$. (6)

Diese Gleichung ist allgemeingültig, denn jede Zahl löst sie:

Etwa die Zahl 7: $0 \cdot 7 = 0$.

7 ist aber keine Lösung von (5): $4 \cdot 7 = 8$ ist falsch.

Man erkennt, dass die Multiplikation mit 0 keine Äquivalenzumformung ist, denn dann entstehen Lösungen, die nicht für die **Anfangsgleichung** (5) gelten.

2. Multiplikation mit einem Term, der x enthält, ist oft <u>keine</u> Äquivalenzumformung.

Ein sehr aussagekräftiges Beispiel dazu:

Anfangsgleichung: $2x + 3 = x + 6$ | - 3 und - x (7)

Ergibt die Endgleichung $x = 3$ (8)

Die Endgleichung und Anfangsgleichung haben also nur die Lösung 3.

Ich multipliziere jetzt diese Gleichung beidseitig mit dem Term $(x-4)$, dann entsteht:

$$(2x+3)(x-4) = (x+6)(x-4) \qquad (8)$$

oder ausmultipliziert: $2x^2 - 8x + 3x - 12 = x^2 - 4x + 6x - 24$

führt auf $2x^2 - 5x - 12 = x^2 + 2x - 24$

und dann auf $x^2 - 7x + 12 = 0$. (9)

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen 3 und 4, wie man durch eine Probe nachweisen kann: $\boxed{3}^2 - 7 \cdot \boxed{3} + 12 = 9 - 21 + 12 = 0$

bzw. $\boxed{4}^2 - 7 \cdot \boxed{4} + 12 = 16 - 28 + 12 = 0$

Beobachtung: Durch die Multiplikation der Gleichung (7) mit dem Term $(x-4)$ ist dessen Nullstelle, also die Zahl 4 zur Lösungsmenge der Endgleichung (9) dazu gekommen.

Wir werden dies auf der übernächsten Seite allgemein betrachten.

3. Division mit einem Term, der x enthält, ist oft <u>keine</u> Äquivalenzumformung.

Wir betrachten dazu das Beispiel: $2x-2=3x-3 \quad | \ -2x+3 \qquad (1)$

Es folgt: $1=x \qquad (2)$

(2) und (1) haben die Lösungszahl 1.

Nun beschreite ich einen anderen Lösungsweg und klammere auf beiden Seiten aus:

$$2\cdot(x-1)=3\cdot(x-1) \qquad (3)$$

In einem Anfall von Freude erkenne ich, dass man ja durch die Klammer $(x-1)$ dividieren kann: $2\cdot\cancel{(x-1)}=3\cdot\cancel{(x-1)}$

Und somit bleibt übrig: $2=3 \qquad (4)$

Diese Gleichung hat keine Lösung mehr. Durch die Division durch $(x-1)$ ist unsere Lösung verloren gegangen!

Merke: Dividiert man eine Gleichung durch einen Term, der x enthält, kann es passieren, dass man eine Lösungszahl verliert.

Hinweis: ***Diesen Fehler begehen viele Schüler***, wenn sie eine Gleichung dieser Art lösen: $x^2+8x=0$

Falscher Lösungsweg:

Da jeder Summand den Faktor x enthält, <u>dividieren</u> manche Schüler diese Gleichung durch x, worauf die neue Gleichung so heißt:

$x+8=0$

Aus ihr erhält man $x=-8$.

Lösungsmenge: $\mathbf{L}=\{-8\}$

Richtiger Lösungsweg:

Da jeder Summand den Faktor x enthält, <u>kann man x ausklammern</u> worauf die neue Gleichung so heißt:

$x(x+8)=0$

Diese Gleichung stellt ein Nullprodukt dar.

Ein Produkt wird genau dann 0, wenn einer der Faktoren 0 wird:

1. Faktor: $x=0$ Erste Lösung: $x_1=0$

2. Faktor: $(x+8)=0$ Zweite Lösung: $x_2=-8$

Lösungsmenge; $\mathbf{L}=\{0;-8\}$

Beobachtung: Die Division durch den Term „x“ hatte zur Folge, dass dessen Nullstelle $x=0$ als Lösung verloren geht.

2.2 Welche Lösungen kommen zu einer Gleichung dazu, wenn man sie mit einem Term multipliziert?

Allgemeine Betrachtung:

Eine Gleichung hat allgemein diese Form: $T_L = T_R$

T_R ist dabei der links stehende Term und T_R der rechts stehende Term.

Was passiert, wenn man diese Gleichung mit dem Term (x - a) multipliziert?.

Dann entsteht diese Gleichung: $T_1 \cdot (x-a) = T_2 \cdot (x-a)$. (*)

Nun alles nach links: $T_1 \cdot (x-a) - T_2 \cdot (x-a) = 0$

Jetzt wird $(x-a)$ ausgeklammert: $(T_1 - T_2) \cdot (x-a) = 0$.

Diese Gleichung ist ein sogenanntes **NULLPRODUKT**

WISSEN: Ein Produkt ist nur dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

Das heißt: Aus $(T_1 - T_2) \cdot (x-a) = 0$

folgen diese beiden Möglichkeiten:

1. Möglichkeit: $(T_1 - T_2) = 0$

2. Möglichkeit: $(x-a) = 0$

Daraus folgen: $\underbrace{T_1 = T_2}_{\text{Anfangsgleichung}}$ $\underbrace{x = a}_{\text{Zusatzlösung}}$

Wir haben also nach wie vor die Anfangsgleichung $T_1 = T_2$ mit ihren Lösungen, aber zusätzlich noch die Lösung x = a für die Endgleichung.

Also ist die „Nullstelle" des Terms (x - a) durch diese Multiplikation für die Lösung der Endgleichung dazu gekommen.

MERKE:

Wird eine Gleichung mit einem Term T multipliziert,
dann erweitert sich die Lösungsmenge um die Nullstelle dieses Terms.

Man kann dies übrigens abkürzen und durch Einsetzen zeigen, dass auch schon (*) die zusätzliche Lösung a hat. Ich finde persönlich nur, dass die gezeigt Methode beeindruckender ist.

Folgerungen für Bruchgleichungen

Beispiel 1a $\frac{4}{x-1} = 2$ (1).

Die Gleichung hat die Lösungszahl 3, was man durch eine Probe bestätigen kann:

$\frac{4}{\boxed{3}-1} = 2$ ist eine wahre Aussage.

Zur Übung multiplizieren wir die Gleichung jetzt mit dem Term $(x - 5)$ und führen die weitere Rechnung exakt so durch wie dies allgemein auf der Seite zuvor gezeigt worden ist.

$$\frac{4}{x-1} \cdot (x-5) = 2 \cdot (x-5) \qquad (2)$$

Alles nach links bringen: $\quad | \; -2 \cdot (x-5)$

Ergibt: $$\frac{4}{x-1} \cdot (x-5) - 2 \cdot (x-5) = 0 \qquad (3)$$

$(x-5)$ ausklammern: $$\left[\frac{4}{x-1} - 2\right] \cdot (x-5) = 0 \qquad (4)$$

Diese Gleichung ist ein **Nullprodukt**.
Es wird dann 0, wenn einer der Faktoren Null wird:

Der 1. Faktor ist $\left[\frac{4}{x-1} - 2\right] = 0$ bzw. $\frac{4}{x-1} = 2$.

Dies ist die gegebene Gleichung, von der wir wissen, dass sie die Lösungszahl $x_1 = 3$ hat

Der 2. Faktor ist $(x-5) = 0$ was zur Lösungszahl $x_2 = 5$ führt.

Die Gleichungen (4), (3) und (2) haben also die Lösungszahlen 3 und 5,

aber die Anfangsgleichung (1) hat nur die Lösungszahl 3.

$\frac{4}{\boxed{5}-1} = 2$ ist eine falsche Aussage, denn die linke Seite hat den Wert 1, und $1 \neq 2$.

Man kann auch mit einer Probe sehen, dass 5 keine Lösungszahl von (1) ist:

Beobachtung: Durch Multiplikation der Gleichung (1) mit dem Term $(x-5)$ kommt die Zahl 5, welche Nullstelle dieses Terms ist, zur Lösungszahl der Endgleichung dazu.

Die Multiplikation mit $(x-5)$ hat also die Lösungsmenge unzulässig vergrößert.

Man muss also nachträglich die Lösungszahl 5 für die Anfangsgleichung ausschließen.

Beispiel 1b $\frac{4}{x-1}=2$ (1).

Diese Gleichung hat den Definitionsbereich $\mathbf{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Jetzt tun wir das, was sinnvoll und üblich ist:

Wir multiplizieren wir die Gleichung mit dem Nennerterm $(x-1)$.

Dies führt zu $\frac{4}{x-1}(x-1)=2\cdot(x-1)$ (2)

Ziel dieser Aktion ist es, den Nennerterm wegkürzen zu können:

$$\frac{4}{\cancel{(x-1)}}\cancel{(x-1)}=2\cdot(x-1)$$

Es bleibt: $4=2x-2 \Leftrightarrow 6=2x \Leftrightarrow x=3$

Wir erkennen die Lösungszahl 3.

Bitte Mitdenken:

In 1a wurde die Gleichung mit dem Term $(x-5)$ multipliziert, was zur Folge hatte, dass die Zahl 5 (die Nullstelle des Terms) zur Lösung dazu gekommen ist. Man muss sie also nachträglich wieder ausschließen.

In 1b wurde die Gleichung mit dem Term $(x-1)$ multipliziert, was dann eigentlich zur Folge haben müsste, dass die Zahl 1 zur Lösung dazu gekommen ist. Warum ist dies aber nicht passiert? Die Erklärung ist einfach:

Diese Lösung ist wieder verschwunden, als wir durch $(x-1)$ gekürzt haben!

Man hätte nämlich diese Gleichung auch ohne Kürzen umformen können, und zwar so:

$$\frac{4}{x-1}=2 \qquad | \cdot(x-1)$$

Das führt zu: $\frac{4}{x-1}(x-1)=2\cdot(x-1)$

Alles nach links: $\frac{4}{x-1}(x-1)-2\cdot(x-1)=0$

Und jetzt $(x-1)$ ausklammern: $\left[\frac{4}{x-1}-2\right]\cdot(x-1)=0$

Und jetzt erkennt man, dass es auch die Lösung x = 1 gibt.

Man sieht also:

> Wenn man nicht kürzt, kommt die Nullstelle des Terms dazu, mit dem man die Gleichung multipliziert.

Weil wir aber mit dem Nennerterm multipliziert haben, ist die verbotene Nullstelle des Nenners dazu gekommen, die aber bereits oben im Definitionsbereich ausgeschlossen worden ist.

Das bedeutet, dass man mit einem Blick auf den Definitionsbereich klarstellt, dass die Lösungszahl 1 der Endgleichung nicht zur Anfangsgleichung gehört.

Folgendes Lösungsverfahren wird also angestrebt:

1. Bestimme den Definitionsbereich der Gleichung.
2. Beseitige den Nenner, indem man mit dem Nennerterm multipliziert, und anschließend kürzt.
3. Durch diese Multiplikation kommen die Nullstelle des Nennerterms zu den Lösungen der Endgleichung dazu.

   In der Regel fallen sie durch Kürzen wieder heraus. *In besonderen Fällen aber nicht.*
4. Daher überprüft man am Ende stets, ob die Lösungszahlen der Endgleichungen zum Definitionsbereich der Gleichung gehören.

   Denn dort werden ja gerade die Nullstellen der Nenner ausgeschlossen!

Beispiel 2 $\frac{12}{x} = 3$ (1)

Diese Gleichung hat den Definitionsbereich $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Multiplikation mit dem Nennerterm $\frac{12}{x} = 3 \quad | \cdot x$

$$\frac{12}{x} \cdot x = 3 \cdot x$$

Durch x kürzen: $12 = 3x \quad | :3$

$$4 = x$$

Diese Endgleichung hat die Lösungszahl 4, die dem Definitionsbereich abgehört.

Daher löst 4 auch die Anfangsgleichung (1).

Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \{4\}$

Beispiel 3 $\frac{x+1}{x+2} + 1 = \frac{2x+3}{x+2}$

Definitionsbereich: $\mathbf{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$

Multiplikation mit dem Nennerterm $(x+2)$: $\frac{x+1}{x+2} \cdot (x+2) + 1 \cdot (x+2) = \frac{2x+3}{x+2} \cdot (x+2)$

Kürzen $\frac{x+1}{\cancel{x+2}} \cdot \cancel{(x+2)} + 1 \cdot (x+2) = \frac{2x+3}{\cancel{x+2}} \cdot \cancel{(x+2)}$

$$x + 1 + x + 2 = 2x + 3$$

Zusammenfassen: $2x + 3 = 2x + 3$

Die Endgleichung ist allgemeingültig, also ist jede Zahl der Grundmenge $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ Lösung.

Jetzt ist die Nullstelle des Nennerterms, mit dem wir multipliziert haben, nicht durch Kürzen herausgefallen. Daher muss man sie selbst ausschließen und folgern:

Die Lösungsmenge ist der Definitionsbereich der Gleichung: $L = D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Zusammenfassung:

Bruchgleichungen werden dadurch gelöst, dass man außer Äquivalenzumformungen auch die Multiplikation der Gleichung mit dem Nennerterm durchführt. Dies bewirkt, dass man den betreffenden Nenner wegkürzen kann

Dabei kann es passieren, dass eine Nullstelle des Nennerterms als Lösung dazukommt. Sollte dies der Fall sein, erkennt man es daran, dass diese Lösung als „verbotene" Zahl nicht zum Definitionsbereich gehört.
Man wird sie nachträglich wieder von der Lösungsmenge ausschließen!

Dazu benötigt man den Definitionsbereich einer Bruchgleichung.
Also sollte man damit beginnen, den Definitionsbereich zu ermitteln

Übungen dazu findet man im Text 12111.

3 Faktorisierung der Nenner und kleinster gemeinsamer Nenner

Für die Vereinfachung von Bruchgleichungen wird man wie zuvor angesprochen die Gleichungen mit dem Hauptnennerterm multiplizieren, so dass man anschließend alle Nenner wegkürzen kann.
Das Ermitteln des kleinsten gemeinsamen Nenners ist also neben der Bestimmung des Definitionsbereichs die erste Beschäftigung zum Lösen der Bruchgleichung.

Ich habe die wichtigsten Fälle zusammengestellt und erläutere sie an Beispielen:

1. Fall: Gleichungen ohne x im Nenner:

   Beispiel 1: $\frac{x}{4}+\frac{x+1}{6}=1$ Seite 16

2. Fall: Zahlenfaktor in Nenner ausklammern:

   Beispiel 2: $\frac{5}{2x+10}-\frac{1}{3x+15}=2$ Seite 17

3. Fall: Vertauschte Differenzen erkennen:

   Beispiel 3: $\frac{2}{x-5}-\frac{1}{5-x}=3$ Seite 18

4. Fall: x ausklammern:

   Beispiel 4: $\frac{x^2}{x^2+4x}+\frac{2}{x}=1$ Seite 19

5. Fall: Die 3. Binomische Formel anwenden: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

   Beispiel 5: $\frac{36}{x^2-16}+\frac{x}{x-4}=1$ Seite 20

6. Fall: Die 1. binomische Formel anwenden: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

   Beispiel 6: $\frac{x^2}{x^2+10x+25}-\frac{6}{3x+15}=1$ Seite 21

7. Fall: Die 2. binomische Formel anwenden: $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

   Beispiel 7: $\frac{2x}{x-10}+\frac{1}{x^2-20x+100}=2$ Seite 22

8. Fall: Quadratische Terme anders zerlegen: $ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)(x-x_2)$

   Beispiel 8: $\frac{2x}{x+3}+\frac{4}{x^2+x-6}=\frac{2x}{x-2}$ Seite 23

9. Fall: Nicht jeder quadratische Term lässt sich faktorisieren

   Beispiel 9: $\frac{3x}{x^2+9}=\frac{3}{x+3}$ Seite 24

WICHTIG: Hier geht es darum, dass man einer Gleichung ein Merkmal ansehen kann.
Kennt man die zugehörige Methode, kann man schnell weiterrechnen ☺.

1. Fall: Gleichungen ohne x im Nenner.

Beispiel 1: $\frac{x}{4}+\frac{x+1}{6}=1$

Der gemeinsame Nenner von 4 und 6 ist nicht $4\cdot 6=24$ sondern 12.
Man erkennt dies, wenn man die Nenner faktorisiert:

1. Nenner: $4=2\cdot 2$
2. Nenner: $6=2\cdot 3$

Hauptnenner: $2\cdot 2\cdot 3=12$

Der gemeinsame Nenner muss 2 Faktoren 2 und den Faktor 3 enthalten. In ihm sind beide Nenner enthalten, und es ist der kleinste gemeinsame Nenner: **Hauptnenner**.

Multiplikation der Gleichung mit dem Hauptnenner ergibt:

$$\frac{x}{4}\cdot 12+\frac{x+1}{6}\cdot 12=1\cdot 12$$

Kürzen: $3x+(x+1)\cdot 2=12$

$$3x+2x+2=12$$

Zusammenfassen: $5x+2=12 \quad |-2$

$$5x=10 \quad |:5$$

$$x=2$$

Die Endgleichung hat die Lösungszahl 2.

Weil die Anfangsgleichung den Definitionsbereich $\mathbf{D}=\mathbb{Q}$ hat, ist 2 darin enthalten.
Somit ist 2 auch Lösung der Anfangsgleichung:

$$\mathbf{L}=\{2\}$$

2. Fall: Zahlenfaktor in Nenner ausklammern

Beispiel 2: $\frac{5}{2x+10} - \frac{1}{3x+15} = 2$

Man muss erkennen, dass jeder Nenner einen Faktor enthält, den man ausklammern kann.

1. Nenner $2x+10 = 2\cdot(x+5)$

2. Nenner: $3x+15 = 3\cdot(x+5)$

Gemeinsamer Nenner: $2\cdot 3\cdot(x+5)$ (Hauptnenner)

Man erkennt jetzt auch, dass der Nenner nur dann 0 werden kann, wenn die Klammer $(x+5)$ Null wird, also für x = -5.

Daher kennen wir den **Definitionsbereich** der Gleichung: $\mathbf{D} = \mathbb{Q}\setminus\{-5\}$

Nun muss man den Nenner faktorisieren:

$$\frac{5}{2(x+5)} - \frac{1}{3(x+5)} = 2$$

Jetzt mit dem Hauptnenner multiplizieren und kürzen:

$$\frac{5}{\cancel{2(x+5)}}\cdot \cancel{2}\cdot 3\cdot \cancel{(x+5)} - \frac{1}{\cancel{3(x+5)}}\cdot 2\cdot \cancel{3\cdot(x+5)} = 2\cdot 2\cdot 3\cdot(x+5)$$

Dies kann man auch gleich so aufschreiben:

$$5\cdot 3 - 2 = 12\cdot(x+5) \quad |\ :13$$

$$13 = 12x + 60 \quad |\ -60$$

$$-47 = 12x \quad |\ :12$$

$$-\tfrac{47}{12} = x$$

Die Endgleichung hat die Lösungszahl $-\tfrac{47}{12}$.

Weil sie zum Definitionsbereich gehört, bildet sie die Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \left\{-\tfrac{47}{12}\right\}$

3. Fall: Vertauschte Differenzen erkennen

Beispiel 3: $\frac{2}{x-5}-\frac{1}{5-x}=3$

Diese Nenner haben ein Merkmal, das auffallen **muss**. Der zweite Nenner die vertausche Differenz des ersten Nenners. Zwischen solchen Termen gilt eine einfache Beziehung:

$$(5-x)=-(x-5)$$

Beweis: Man kann das Minuszeichen vor der Klammer als Faktor -1 betrachten und dann in die Klammer multiplizieren, dann entsteht der Term der linken Seite.

Mit diesem **Ausklammertrick des Minuszeichens** verändert man die Anfangsgleichung:

$$\frac{2}{x-5}-\frac{1}{-(x-5)}=3$$

Das Minuszeichen im Nenner darf man vor den Bruch ziehen, dann erhält man

$$\frac{2}{x-5}+\frac{1}{(x-5)}=3$$

Zusammenfassen: $\frac{3}{x-5}=3$

Hier erkennt man am schnellsten den Definitionsbereich der Gleichung: $\mathbf{D}=\mathbb{Q}\setminus\{5\}$

Division durch 3 ergibt: $\frac{1}{x-5}=1 \quad | \cdot(x-5)$

$1=x-5 \quad | +5$

Endgleichung: $6=x$

Da die Lösungszahl 6 der Endgleichung zu **D** gehört, ist sie auch Lösung der Anfangsgleichung:

$\mathbf{L}=\{6\}$

4. Fall: x ausklammern

Beispiel 4: $\frac{x^2}{x^2+4x}+\frac{2}{x}=1$

Der erste Nenner hat ein ***Merkmal***, das auffallen **muss**. Jeder Summand dieses Nenners enthält x. **Daher kann man x ausklammern**. Und schon ist dieser Nenner faktorisiert worden:

1. Nenner: $x^2+4x = x\cdot(x+4)$

2. Nenner. x

Gemeinsamer Nenner: $x\cdot(x+4)$ (Hauptnenner)

Definitionsbereich: $\mathbf{D} = \mathbb{Q}\setminus\{0\,;-4\}$

Beseitigung der Brüche durch Multiplikation mit dem Hauptnenner:

$$\frac{x^2}{x^2+4x}+\frac{2}{x}=1 \qquad |\ \cdot x\cdot(x+4)$$

und kürzen: $\frac{x^2}{\cancel{x\cdot(x+4)}}\cdot\cancel{x\cdot(x+4)}+\frac{2}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}\cdot(x+4)=1\cdot x\cdot(x+4)$

oder gleich so: $x^2+2\cdot(x+4)=x(x+4)$

Daraus folgt: $x^2+2x+8=x^2+4x \qquad |\ -2x$ und $-x^2$

$\boxed{8=2x}$

$x=4$

Da 4 dem Definitionsbereich angehört, gilt: $\mathbf{L}=\{4\}$

5. Fall: Die 3. binomische Formel anwenden: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Beispiel 5: $\frac{36}{x^2-16} + \frac{x}{x-4} = 1$

Der 1. Nenner hat ein ***Merkmal***, das auffallen muss: Er kann durch die 3. binomische Formel faktorisiert werden: $x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$

Der erste Nenner enthält auch den zweiten Nenner als Faktor, weshalb er Hauptnenner ist

Definitionsbereich: $\mathbf{D} = \mathbb{Q} \setminus \{\pm 4\}$

Multiplikation der Gleichung mit $(x+4)(x-4)$ und kürzen:

$$\frac{36}{\cancel{x^2-16}} \cdot \cancel{(x+4)(x-4)} + \frac{x}{\cancel{x-4}} \cdot (x+4)\cancel{(x-4)} = 1 \cdot (x+4)(x-4)$$

Oder gleich so: $36 + x(x+4) = (x+4)(x-4)$

$36 + x^2 + 4x = x^2 - 16$ | -36 und $-x^2$

$4x = -52$ | : 4

$x = -13$

Da -13 zum Definitionsbereich gehört folgt:

$\mathbf{L} = \{-13\}$

6. Fall: Die 1. binomische Formel anwenden: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

Beispiel 6: $\frac{x^2}{x^2+10x+25} - \frac{6}{3x+15} = 1$

Der 1. Nenner hat ein ***Merkmal***, das auffallen muss: Er kann durch die 1. binomische Formel faktorisiert werden: $x^2+10x+25 = (x+5)^2$

2. Nenner: $3x+15 = 3\cdot(x+5)$ 3 ausklammern

Damit lautet die Gleichung: $\frac{x^2}{(x+5)^2} - \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{3}\cdot(x+5)} = 1$

Man konnte den 2. Bruch noch kürzen, was die Arbeit erleichtert.

Definitionsbereich: $\mathbf{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-5\}$

Multiplikation der Gleichung mit dem Hauptnenner $(x+5)^2$ und kürzen:

$$\frac{x^2}{\cancel{(x+5)^2}}\cdot\cancel{(x+5)^2} - \frac{2}{\cancel{(x+5)}}\cdot(x+5)^{\cancel{2}} = 1\cdot(x+5)^2$$

Oder gleich so: $x^2 - 2\cdot(x+5) = (x+5)^2$

Das heißt: $x^2 - 2x - 10 = x^2 + 10x + 25$ | $-x^2$

$-2x - 10 = 10x + 25$ | $+2x - 25$

Alles nach rechts: $-35 = 12x$ | $:12$

$x = -\frac{35}{12}$

Da diese Lösungszahl zum Definitionsbereich gehört, folgt:

$\mathbf{L} = \left\{-\frac{35}{12}\right\}$

7. Fall: Die 2. binomische Formel anwenden: $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Beispiel 7: $$\frac{2x}{x-10} + \frac{1}{x^2 - 20x + 100} = 2$$

Der 2. Nenner hat ein ***Merkmal***, das auffallen muss: Er kann durch die 2. binomische Formel faktorisiert werden: $x^2 - 20x + 100 = (x-10)^2$

1. Nenner: $x - 10$ lässt sich nicht faktorisieren

Hauptnenner: $(x-10)^2$.

Der erste Nenner ist im zweiten enthalten.

Damit lautet die Gleichung: $\frac{2x}{x-10} + \frac{1}{(x-10)^2} = 2$

Definitionsbereich: $\mathbf{D} = \mathbb{Q} \setminus \{10\}$

Multiplikation der Gleichung mit $(x-10)^2$ und kürzen:

$$\frac{2x}{\cancel{x-10}} \cdot (x-10)^{\cancel{2}} + \frac{1}{\cancel{(x-10)^2}} \cdot \cancel{(x-10)^2} = 2 \cdot (x-10)^2$$

bzw. gleich so: $2x \cdot (x-10) + 1 = 2 \cdot (x-10)^2$

Ausführlicher:

$$2x^2 - 20x + 1 = 2(x^2 - 20x + 100)$$

$$2x^2 - 20x + 1 = 2x^2 - 40x + 200 \qquad | -2x^2$$

$$-20x = -40x + 199 \qquad | +40x - 1$$

$$20x = 199$$

$$x = \tfrac{199}{20}$$

Da $\frac{199}{20}$ zum Definitionsbereich gehört folgt: $\mathbf{L} = \left\{-\tfrac{199}{20}\right\}$

8. Fall: Quadratische Terme anders zerlegen: $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$

Beispiel 8: $$\frac{2x}{x+3} + \frac{4}{x^2+x-6} = \frac{2x}{x-2}$$

Faktorisieren der Nenner:

1. Nenner: $x+3$ lässt sich nicht faktorisieren

3. Nenner: $x-2$ lässt sich nicht faktorisieren

2. Nenner: x^2+x-6 ?

> Hinweis: Sehr oft sind für Schüler die Aufgaben dahingehend vereinfacht, dass der quadratische Term das Produkt der beiden anderen ist.
>
> Dies überprüft man so: $(x+3)(x-2) = x^2+3x-2x-6 = x^2+x-6$

Damit lautet die Gleichung: $$\frac{2x}{x+3} + \frac{4}{(x+3)(x-2)} = \frac{2x}{x-2}$$

Definitionsbereich: $\mathbf{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-3\,;2\}$

Kleinster gemeinsamer Nenner: $(x+3)(x-2)$.

Der erste und der dritte Nenner sind im zweiten enthalten.

Multiplikation der Gleichung mit $(x+3)(x-2)$ und kürzen:

$$\frac{2x}{\cancel{x+3}} \cdot \cancel{(x+3)}(x-2) + \frac{4}{\cancel{(x+3)(x-2)}} \cdot \cancel{(x+3)(x-2)} = \frac{2x}{\cancel{x-2}} \cdot (x+3)\cancel{(x-2)}$$

bzw. gleich so: $2x \cdot (x-2) + 4 = 2x \cdot (x+3)$

Ausmultiplizieren: $2x^2 - 4x + 4 = 2x^2 + 6x \qquad | -2x^2 + 4x$

Alles nach rechts: $4 = 10x$

$x = \frac{2}{5}$

Da $\frac{2}{5}$ zum Definitionsbereich gehört:

$\mathbf{L} = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

9. Fall: Nicht jeder quadratische Term lässt sich faktorisieren

Beispiel 9: $\frac{3x}{x^2+9} = \frac{3}{x+3}$

Keiner der Nenner lässt sich faktorisieren.

Beim Nenner x^2+9 erkennt man das daran, dass er keine Nullstelle besitzt.

Aus $x^2+9=0$ folgt nämlich $x^2=-9$, was nicht möglich ist, weil Quadrate nie negativ werden können.

Definitionsbereich: $\mathbf{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$

Hauptnenner: $(x^2+9)(x+3)$

$$\frac{3x}{x^2+9} = \frac{3}{x+3} \qquad | \cdot (x^2+9)(x+3)$$

$$\frac{3x}{\cancel{x^2+9}} \cdot \cancel{(x^2+9)}(x+3) = \frac{3}{\cancel{x+3}} \cdot (x^2+9)\cancel{(x+3)}$$

$$3x \cdot (x+3) = 3(x^2+9)$$

$$3x^2+9x = 3x^2+27 \qquad | -3x^2$$

$$9x = 27 \qquad | :9$$

$$x = 3$$

Da 3 zum Definitionsbereich gehört:

$\mathbf{L} = \{3\}$

4 Übungsteil

Mustergleichungen, die nicht zu quadratischen Endgleichungen führen

4.1 Keine „echten“ Bruchgleichungen (also ohne x im Nenner)

Beispiel 1 $\frac{x}{3} - 2 = \frac{2x}{5} + \frac{1}{2}$

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Weil x nicht im Nenner vorkommt, sind alle Zahlen erlaubt: $D = \mathbb{Q}$
oder für Schüler ab Klasse 8/9 aufwärts: $D = \mathbb{R}$.

(Bis Klasse 8 kennt man meist nur die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.)

2. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Als Nenner kommen vor: 3, 5 und 2.
Der kleinste gemeinsame Nenner (Hauptnenner) ist das kgV der Einzelnenner, also hier die Zahl 30.

3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$$\frac{x}{3} - 2 = \frac{2x}{5} + \frac{1}{2} \quad | \cdot 30$$

$$\frac{x}{3} \cdot 30 - 2 \cdot 30 = \frac{2x}{5} \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot 30$$

Der rote Pfeil soll anzeigen, dass gute Kopfrechner durch Überspringen der nächsten Zeilen die Rechnung abkürzen können!

Nach den Regeln des Bruchrechnen ist $\boxed{\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}}$.

Man kann daher die Zahlen b und c eventuell kürzen:

$$\frac{x}{\cancel{3}_1} \cdot \cancel{30}^{10} - 2 \cdot 30 = \frac{2x}{\cancel{5}_1} \cdot \cancel{30}^{6} + \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \cancel{30}^{15}$$ Und die Nenner sind weg!

Jetzt weiter vereinfachen

x links isolieren.

$$10x - 60 = 12x + 15 \quad |+60$$

$$10x = 12x + 75 \quad |-12x$$

$$-2x = 75 \quad |:(-2)$$

$$x = -\tfrac{75}{2}$$

WISSEN:

Wir haben jetzt die gegebene Gleichung durch Äquivalenzumformungen in einfachere Gleichungen umgewandelt, die folglich alle dieselbe Lösungsmenge haben.
Die letzte Gleichung ist so einfach, dass man ihre Lösungszahl $-\frac{75}{2}$ erkennt.
Daher hat auch die gegebene Gleichung diese Lösungszahl
und damit die Lösungsmenge: $L = \left\{-\frac{75}{2}\right\}$

Beispiel 2 $\frac{x-2}{3} = 4x + \frac{3x-6}{5}$

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Weil x nicht im Nenner vorkommt, sind alle Zahlen erlaubt: $D = \mathbb{Q}$
oder für Schüler ab Klasse 8/9 aufwärts: $D = \mathbb{R}$.

(Bis Klasse 8 kennt man meist nur die rationalen Zahlen **Q**.)

2. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Als Nenner kommen vor: 3 und 5.

Der kleinste gemeinsame Nenner (Hauptnenner) ist das kgV der Einzelnenner, also hier die Zahl 15.

3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

Der rote Pfeil soll anzeigen, dass gute Kopfrechner durch Überspringen der nächsten Zeilen die Rechnung abkürzen können!

$$\frac{x-2}{3} = 4x + \frac{3x-6}{5} \qquad | \cdot 15$$

$$\frac{x-2}{\cancel{3}_1} \cdot \cancel{15}^5 = 4x \cdot 15 + \frac{3x-6}{\cancel{5}_1} \cdot \cancel{15}^3$$

$(x-2) \cdot 5 = 60x + (3x-6) \cdot 3$ Jetzt weiter vereinfachen:

$$5x - 10 = 60x + 9x - 18$$

$$5x - 10 = 69x - 18 \qquad |+18$$

$$5x + 8 = 69x \qquad |-5x$$ x rechts isolieren!

$$8 = 64x$$ | Seiten vertauschen (wenn man will)

$$64x = 8 \qquad |:64$$

$$x = \tfrac{1}{8}$$

Weil nur Äquivalenzumformungen angewandt worden sind, hat die Endgleichung dieselbe Lösungsmenge wie die Anfangsgleichung.

Lösungsmenge: $L = \left\{\tfrac{1}{8}\right\}$

4.2 Einfache Bruchgleichungen – mit linearen Nennertermen

Beispiel 3: $\frac{12}{x} = 3$ (Siehe Seite 13)

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

x = 0 ist verboten: $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

2. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Einziger Nenner ist x.

3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$\frac{12}{x} = 3 \quad | \cdot x$

$\frac{12}{x} \boxed{\cdot x} = 3 \boxed{\cdot x} \quad$ | kürzen!

$12 = 3 \cdot x \quad | :3$

$4 = x$

4. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

Hier wurde mit x multipliziert, sonst sind nur Äquivalenzumformungen angewandt worden.

Bei dieser Multiplikation mit x hätte sich die Lösungsmenge um die Zahl 0 vergrößern können. Aber dies ist nicht der Fall.

Die Lösungszahl 4 gehört zum Definitionsbereich der Gleichung.

Lösungsmenge: $L = \{4\}$

Beispiel 4: $\frac{5}{4x}=\frac{10}{3}$ (1)

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

x = 0 ist verboten: $D=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$

2. Schritt: Hauptnenner bestimmen

1. Nenner:	4x
2. Nenner:	3
Hauptnenner:	$4x\cdot 3=12x$

3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$\frac{5}{4x}=\frac{10}{3}$ $\quad | \cdot 12x$

$\frac{5}{\cancel{4x}}\cdot\cancel{12x}^{3}=\frac{10}{\cancel{3}}\cdot\cancel{12x}^{4x} \Leftrightarrow \boxed{15=40x}$

$40x=15$ $\quad | :40$

$x=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$

4. Schritt: Gehört die Lösung $\frac{3}{8}$ zum Definitionsbereich?

Hier wurde mit 4x multipliziert, sonst sind nur Äquivalenzumformungen angewandt worden. Bei dieser Multiplikation mit 4x hätte sich die Lösungsmenge um die Zahl 0 vergrößern können.

Aber dies ist nicht der Fall. $\frac{3}{8}$ gehört zum Definitionsbereich der Gleichung.

Lösungsmenge: $L=\left\{\frac{3}{8}\right\}$

Wir machen *einmal* die Probe: $\frac{5}{4\cdot\frac{3}{8}}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{5\cdot\cancel{8}^{2}}{\cancel{4}\cdot 3}=\frac{10}{3}$ ist eine wahre Aussage.

Beispiel 5: $\frac{3}{2x}+\frac{2}{6x}=5$

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

x = 0 ist verboten: $D=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$

2. Schritt: Hauptnenner bestimmen

1. Nenner:	2x
2. Nenner:	6x
Hauptnenner:	6x **(nicht 12x)**!

3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$\frac{3}{2x}+\frac{2}{6x}=5 \quad | \cdot 6x$

$\frac{3}{\cancel{2x}}\cdot \cancel{6x}^{3}+\frac{2}{\cancel{6x}}\cdot \cancel{6x}=5\cdot 6x$

$9+2=30x$

^ $30x=11 \quad |:11$

$x=\frac{11}{30}$

4. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

Hier wurde mit 6x multipliziert, sonst sind nur Äquivalenzumformungen angewandt worden. Bei dieser Multiplikation mit 6x hätte sich die Lösungsmenge um die 0 vergrößern können. Aber dies ist nicht der Fall.

$\frac{11}{30}$ gehört zum Definitionsbereich der Gleichung.

Lösungsmenge: $L=\left\{\frac{11}{30}\right\}$

Beispiel 6: $\frac{3}{x-1} = \frac{9}{2}$

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

x = 1 ist verboten, denn sonst wird der 1. Nenner Null! $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$

2. Schritt: Hauptnenner bestimmen

1. Nenner:	x – 1
2. Nenner:	2
Hauptnenner:	$2 \cdot (x-1)$

3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$$\frac{3}{\cancel{x-1}} \cdot 2\cancel{(x-1)} = \frac{9}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}(x-1)$$

$$6 = 9 \cdot (x-1)$$

$$6 = 9x - 9 \qquad | +9$$

$$15 = 9x \qquad | :9$$

$$x = \tfrac{15}{9} = \tfrac{5}{3}$$

4. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

Hier wurde mit $2 \cdot (x-1)$ multipliziert, sonst sind nur Äquivalenzumformungen angewandt worden. Bei dieser Multiplikation hätte sich die Lösungsmenge um die Nullstelle des Terms vergrößern können, also um 1. Aber dies ist nicht der Fall.

$\frac{5}{3}$ gehört zum Definitionsbereich der Gleichung, daher gilt:

Lösungsmenge: $L = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

Beispiel 7: $\frac{5}{y+2} = \frac{2}{y+2}$

$\boxed{\text{1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen}}$

y = -2 ist verboten, denn sonst werden beide Nenner Null! $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$

$\boxed{\text{2. Schritt: Hauptnenner bestimmen}}$

Gemeinsamer Nenner ist $y+2$

$\boxed{\text{3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren}}$

$$\frac{5}{y+2} = \frac{2}{y+2} \qquad | \cdot (y+2) \text{ und kürzen}$$

$$\frac{5}{\cancel{y+2}} \cdot \cancel{(y+2)} = \frac{2}{\cancel{y+2}} \cdot \cancel{(y+2)}$$

5 = 2 Man kann die Zwischenzeile überspringen!

Diese Umformung führt zu einem Widerspruch, zu einer falschen Aussage.

Die letzte Gleichung ist unlösbar, also auch die gegebene Gleichung.

Lösungsmenge: $L = \{\ \}$

Beispiel 8: $\frac{4}{x+2}+1=\frac{x+6}{x+2}$ (1)

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

x = -2 ist verboten, denn sonst werden beide Nenner Null! $D=\mathbb{Q}\setminus\{-2\}$

2. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Gemeinsamer Nenner ist $x+2$

3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$$\frac{4}{x+2}+1=\frac{x+6}{x+2} \qquad | \cdot(x+2) \qquad \text{und kürzen}$$

$$\frac{4}{\cancel{x+2}}\cdot\cancel{(x+2)}+1\cdot(x+2)=\frac{x+6}{\cancel{x+2}}\cdot\cancel{(x+2)}$$

$$4+x+2=x+6$$

$$x+6=x+6 \qquad (2)$$

Eine weitere Umformung erübrigt sich. Die Endgleichung (2) liefert **für jede Zahl** eine wahre Aussage, sie ist also allgemeingültig.

Ihre Lösungsmenge ist folglich $L_2=Q$

4. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

ACHTUNG: Oben wurde jedoch die Gleichung (1) mit (x+2) multipliziert. Damit kam -2 als Lösung dazu, die aber verboten ist, denn diese Zahl gehört nicht zum Definitionsbereich $D=Q\setminus\{-2\}$.

Also hat die gegebene Gleichung (1) nicht dieselbe Lösungsmenge wie (2), sondern:

Lösungsmenge: $L_1=Q\setminus\{-2\}$

Beispiel 9: $\frac{3x-6}{x-3} = \frac{3}{x-3} + 2$ (1)

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

x = 3 ist verboten, denn sonst werden beide Nenner Null! $D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$

2. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Gemeinsamer Nenner ist $x-3$

3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$\frac{3x-6}{x-3} = \frac{3}{x-3} + 2 \quad | \cdot (x-3)$ und kürzen

$\frac{3x-6}{\cancel{x-3}} \cdot \cancel{(x-3)} = \frac{3}{\cancel{x-3}} \cdot \cancel{(x-3)} + 2 \cdot (x-3)$

$3x-6 = 3 + 2(x-3)$

$3x-6 = 3+2x-6 \quad | +6$

$3x = 3+2x \quad | -2x$

$x = 3 \quad (2)$

Diese Endgleichung hat die Lösungsmenge $L_2 = \{3\}$

4. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

Doch weil die Zahl 3 nicht zum Definitionsbereich der Ausgangsgleichung (1) gehört, kann sie auch nicht Lösung von (1) sein:

Lösungsmenge: $L_1 = \{\ \}$

Der Grund sollte jetzt klar sein:
Die Gleichung (1) wurde mit dem Term (x - 3) multipliziert.
Dies ist keine Äquivalenzumformung.
In diesem Fall ist dadurch die Nullstelle dieses Terms, also die Zahl 3 als Lösung dazu gekommen.
Wer darauf nicht achtet, ...

Trainingsgleichungen (Teil 1)

Bestimme die Lösungsmenge nach folgendem Schema:

1. Schritt: Bestimme den Definitionsbereich der Gleichung.

2. Schritt: Mache die Gleichung durch Multiplikation mit einem geeigneten Term bruchfrei

3. Schritt: Führe Äquivalenzumformen durch bis eine einfache Endgleichung erreicht ist, deren Lösung man erkennt.

4. Schritt: Überprüfe, ob die Lösungen der Endgleichungen zum Definitionsbereich der Anfangsgleichung gehören.

5. Schritt: Gib die Lösungsmenge der Anfangsgleichung an.

$\boxed{1}$ $\frac{4}{x}-\frac{3}{2x}=6$ $\boxed{2}$ $\frac{24}{x}=\frac{36}{x}$

$\boxed{3}$ $\frac{8}{x-5}=2$ $\boxed{4}$ $\frac{4}{x+2}-8=0$

$\boxed{5}$ $\frac{4x}{x+1}=4$ $\boxed{6}$ $\frac{3}{x+2}=\frac{5}{x+2}$

$\boxed{7}$ $\frac{x-18}{x-6}=\frac{x+2}{x-6}+10$ $\boxed{8}$ $\frac{x-13}{x+3}=\frac{2x-10}{x+3}-1$

4.3 Etwas schwierigere Bruchgleichungen

Beispiel 10: $\frac{3x-6}{2x+4}=6$

$\boxed{\text{1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen}}$

Wann wird der Nenner 0?

Wann gilt also $2x+4=0$?

Umstellen nach x liefert: $2x=-4 \;|:4$

Also: $x=-2$.

Daher ist -2 auszuschließen: $D=\mathbb{Q}\setminus\{-2\}$

$\boxed{\text{2. Schritt: Hauptnenner bestimmen}}$

Es gibt nur den Nenner 2x + 4.

$\boxed{\text{3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren}}$

$\frac{3x-6}{2x+4}=6 \qquad |\cdot(2x+4)$ und links kürzen

$\frac{3x-6}{\cancel{2x+4}}\cdot\cancel{(2x+4)}=12x+24 \qquad |$ x nach links: |-12x

$3x-6-12x=24 \qquad |$ +6

$-9x=30 \qquad |$:(-9)

$x=\frac{30}{-9}=-\frac{30}{9}=-\frac{10}{3}$

$\boxed{\text{4. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?}}$

Hier wurde mit $(2x+4)$ multipliziert. Bei dieser Multiplikation hätte sich die Lösungsmenge um die Nullstelle des Terms, also um -2 vergrößern können. Aber dies ist nicht der Fall.

$-\frac{10}{3}$ gehört zum Definitionsbereich der Gleichung.

Lösungsmenge: $L=\left\{-\frac{10}{3}\right\}$

Beispiel 11: $\frac{6x+5}{2x-3}=1$

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Wann wird der Nenner 0?

Wann gilt also $2x-3=0$?

Umstellen nach x liefert: $2x=3 \;|:2$

Also: $x=\frac{3}{2}$.

Daher ist $\frac{3}{2}$ auszuschließen: $D=\mathbb{Q}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$

2. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Es gibt nur den Nenner $2x-3$.

3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$\frac{6x+5}{2x-3}=1 \qquad |\cdot(2x-3)$ und links kürzen

$\frac{6x+5}{\cancel{2x-3}}\cdot\cancel{(2x-3)}=2x-3$

$6x+5=2x-3 \qquad |$ -2x und -5

$4x=-8 \qquad |$:4

$x=-2$

4. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

Hier wurde mit $(2x-3)$ multipliziert. Bei dieser Multiplikation hätte sich die Lösungsmenge um die Nullstelle des Terms, also um $\frac{3}{2}$ vergrößern können.

Aber dies ist nicht der Fall.

-2 gehört zum Definitionsbereich der Gleichung.

Lösungsmenge: $L=\{-2\}$

Beispiel 12: $\frac{5x+2}{5x-3}=1$

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Wann wird der Nenner 0?

Wann gilt also $5x-3=0$?

Umstellen nach x liefert: $5x=3 \quad |:5$

Also: $x=\frac{3}{5}$.

Daher ist $\frac{3}{5}$ auszuschließen: $D=\mathbb{Q}\setminus\left\{\frac{3}{5}\right\}$

2. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Es gibt nur den Nenner $5x-3$.

3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$$\frac{5x+2}{5x-3}=1 \qquad |\cdot(5x-3) \text{ und links kürzen}$$

$$\frac{5x+2}{\cancel{5x-3}}\cdot\cancel{(5x-3)}=1\cdot(5x-3)$$

$$5x+2=5x-3 \qquad |\ -5x$$

$$2=-3$$

Dieser Widerspruch besagt, dass die Gleichung unlösbar ist.

Lösungsmenge: $L=\{\ \}$

Beispiel 13: $\frac{4}{x} = \frac{5}{x-2}$

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Wann werden die Nenner 0?

1. Nenner: Für x = 0.

2. Nenner: Für x = 2.

Daher sind 0 und 2 auszuschließen: $D = \mathbb{Q} \setminus \{0;2\}$

2. Schritt: Hauptnenner bestimmen

In diesem Fall ist der Hauptnenner das Produkt beider Nenner:

$HN = x \cdot (x-2)$

3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$\frac{4}{x} = \frac{5}{x-2} \quad | \cdot x(x-2)$ und kürzen

$\frac{4}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}(x-2) = \frac{5}{\cancel{x-2}} \cdot x\cancel{(x-2)}$ *Kann ausgelassen werden!*

$4(x-2) = 5x$

$4x - 8 = 5x \quad | -4x$

$-8 = x$

4. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

Hier wurde mit $x(x-2)$ multipliziert. Bei dieser Multiplikation hätte sich die Lösungsmenge um die Nullstellen des Terms, also um 0 oder 2 vergrößern können. Aber dies ist nicht der Fall.

-8 gehört zum Definitionsbereich der Gleichung.

Lösungsmenge: $L = \{-8\}$

Beispiel 14: $\frac{2}{x-4}=\frac{5}{3-x}$

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Wann werden die Nenner 0?

1. Nenner:	Für x = 4.
2. Nenner:	Für x = 3.
Daher sind 4 und 3 auszuschließen:	$D=\mathbb{Q}\setminus\{3;4\}$

2. Schritt: Hauptnenner bestimmen

In diesem Fall ist der Hauptnenner das Produkt beider Nenner:

$HN=(x-4)(3-x)$

3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$$\frac{2}{x-4}=\frac{5}{3-x} \qquad | \cdot(x-4)(3-x) \text{ und kürzen}$$

$$\frac{2}{\cancel{x-4}}\cdot\cancel{(x-4)}(3-x)=\frac{5}{\cancel{3-x}}\cdot(x-4)\cancel{(3-x)}$$

$$2(3-x)=5(x-4)$$

$$6-2x=5x-20 \qquad | \text{ -5x und -6}$$

$$-7x=-26 \qquad | \text{ (-7)}$$

$$x=\tfrac{26}{7}$$

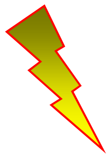
4. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

Hier wurde mit $(x-4)(3-x)$ multipliziert. Bei dieser Multiplikation hätte sich die Lösungsmenge um die Nullstellen des Terms, also um 4 oder 3 vergrößern können. Aber dies ist nicht der Fall.

$\tfrac{26}{7}$ gehört zum Definitionsbereich der Gleichung.

Lösungsmenge: $L=\left\{\tfrac{26}{7}\right\}$

Beispiel 15: **a)** $\dfrac{3x}{x-7} = \dfrac{30}{x-7}$ **b)** $\dfrac{3x}{x-7} = \dfrac{21}{x-7}$



$\boxed{\text{1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen}}$

Wann werden die Nenner 0?

Alle Nenner für $x = 7$.

Daher ist 7 auszuschließen: $D = \mathbb{Q} \setminus \{7\}$

$\boxed{\text{2. Schritt: Hauptnenner bestimmen}}$

Es gibt nur den Nenner $x - 7$.

$\boxed{\text{3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren}}$

a) $\dfrac{3x}{x-7} \cdot (x-7) = \dfrac{30}{x-7} \cdot (x-7)$

Kürzen:

$\dfrac{3x}{\cancel{x-7}} \cdot \cancel{(x-7)} = \dfrac{30}{\cancel{x-7}} \cdot \cancel{(x-7)}$

$3x = 30 \quad |:3$

$x = 10$

b) $\dfrac{3x}{x-7} \cdot (x-7) = \dfrac{21}{x-7} \cdot (x-7)$

$\dfrac{3x}{\cancel{x-7}} \cdot \cancel{(x-7)} = \dfrac{21}{\cancel{x-7}} \cdot \cancel{(x-7)}$

$3x = 21 \quad |:3$

$x = 7$

$\boxed{\text{4. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?}}$

Hier wurde mit (x – 7) multipliziert. Bei dieser Multiplikation hätte sich die Lösungsmenge um die Nullstelle des Terms, 7 vergrößern können.

In a) dies ist nicht der Fall, denn 10 gehört zum Definitionsbereich der Gleichung.

In b) ist dies jedoch der Fall: 7 gehört nicht zum Definitionsbereich der Gleichung, kann also nicht Lösung der Anfangsgleichung sein!

Lösungsmengen: a) $L = \{10\}$ b) $L = \{\ \}$

Beispiel 16: $\frac{2x}{x-6} = \frac{4}{6-x}$

WICHTIGES BEISPIEL mit Sonderfall!

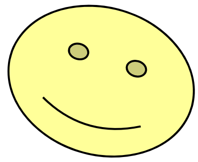
1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Wann werden die Nenner 0?

Beide Nenner haben die Nullstelle $x = 6$.

Daher ist 6 auszuschließen! $D = \mathbb{Q} \setminus \{6\}$

2. Schritt: Hauptnenner bestimmen



Hier liegt ein Sonderfall vor, den man sich merken muss:
Man beachte diese Rechnung: $\boxed{-(x-6)} = -x+6 = \boxed{6-x}$

Dies bestätigt folgende Regel:

MERKE: Vertauscht man in einer Differenz die beiden Zahlen. dann ändert sich das Gesamtvorzeichen der Differenz.

Beispiel: $7-5=2$ aber $5-7=\boxed{-}2$

Also: $(a-b) = -(b-a)$

oder: $(2-3x) = -(3x-2)$ oder $6-x = \boxed{-}(x-6)$

Konsequenz: Wenn die Nenner wie hier Differenzen mit vertauschen Vorzeichen sind, ersetze man einen Nenner wie gezeigt:

$$\boxed{\frac{2x}{x-6} = \frac{4}{6-x}} \Leftrightarrow \frac{2x}{x-6} = \frac{4}{-(x-6)} \Leftrightarrow \boxed{\frac{2x}{x-6} = -\frac{4}{x-6}}$$

MERKE

Nach dieser Erkenntnis, lautet der Hauptnenner (x - 6)

3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$$\frac{2x}{x-6} = -\frac{4}{x-6} \qquad | \cdot (x-6) \text{ und kürzen}$$

$$\frac{2x}{\cancel{x-6}} \cdot \cancel{(x-6)} = -\frac{4}{\cancel{x-6}} \cdot \cancel{(x-6)}$$

$$2x = -4 \qquad | :2$$

$$x = -2$$

4. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

-2 gehört zum Definitionsbereich der Gleichung.

Lösungsmenge: $L = \{-2\}$

Beispiel 17: a) $\frac{4}{2x-6}=\frac{2}{3-x}$

WICHTIGES BEISPIEL mit Sonderfall!

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Wann werden die Nenner 0?

1. Nenner: $2x-6=0 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$

2. Nenner: $3-x=0 \Leftrightarrow x=3$

Daher ist 3 auszuschließen: $D=\mathbb{Q}\setminus\{3\}$

2. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Hier liegt eine **Besonderheit** vor, die man erkennen sollte:
Im 1. Nenner kann man den Faktor 2 ausklammern,
im 2. Nenner vertauscht man die Zahlen und erhält $3-x=-(x-3)$

Damit ändert sich die Gleichung in:

$$\frac{4}{2(x-3)}=\frac{2}{-(x-3)}$$

Nun kürzt man <u>links</u> durch 2, <u>rechts</u> zieht man das Minuszeichen **vor** den Bruch:

$$\frac{2}{(x-3)}=-\frac{2}{(x-3)}$$

Der Hauptnenner ist natürlich $x-3$

3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren und kürzen

$$\frac{2}{\cancel{(x-3)}}\cdot\cancel{(x-3)}=-\frac{2}{\cancel{(x-3)}}\cdot\cancel{(x-3)}$$

Es bleibt: $2=-2$

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Endgleichung, und damit auch die Anfangsgleichung, keine Lösungszahl besitzen.

Lösungsmenge: $L=\{\ \}$

Zusatz: b) $\frac{4}{2x-6}=\frac{-2}{3-x}$

Diese leicht veränderte Gleichung führt nach derselben Methode zu:

$$\frac{4}{2(x-3)}=\frac{-2}{-(x-3)} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{2}{x-3}=\frac{2}{x-3}$$

Diese Endgleichung wird von allen Zahlen des Definitionsbereichs gelöst.

Da aber $3\notin D$ folgt:

Lösungsmenge: $L=\mathbb{Q}\setminus\{3\}=D$

Beispiel 18: $\frac{5x-1}{4x+12} = \frac{2x+1}{3x+9}$

WICHTIGES BEISPIEL mit Faktorisieren!

1. Schritt : Beide Nenner lassen sich durch Ausklammern faktorisieren :

1. Nenner: $4x+12 = 4 \cdot (x+3)$

2. Nenner: $3x+9 = 3 \cdot (x+3)$.

Damit sieht die Gleichung so aus: $\frac{5x-1}{4(x+3)} = \frac{2x+1}{3(x+3)}$

Dadurch werden die nächsten Schritte wesentlich erleichtert.

2. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Wann werden die Nenner 0?

1. Nenner: $4 \cdot (x+3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3$

2. Nenner: $3 \cdot (x+3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3$

Daher ist -3 auszuschließen: $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$

3. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Der gemeinsame Nenner muss die Faktoren 4, 3 und die Klammer (x + 3) enthalten: $HN = 12 \cdot (x+3)$

Schlimm wäre dieser Vorschlag: $HN = (4x+12) \cdot (3x+9)$!

4. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$$\frac{5x-1}{4(x+3)} = \frac{2x+1}{3(x+3)} \qquad | \cdot 12 \cdot (x+3) \text{ und kürzen!}$$

$$\frac{5x-1}{\cancel{4}\,\cancel{(x+3)}} \cdot \cancel{12}^{3} \cdot \cancel{(x+3)} = \frac{2x+1}{\cancel{3}\,\cancel{(x+3)}} \cdot \cancel{12}^{4} \cdot \cancel{(x+3)}$$

$$(5x-1) \cdot 3 = (2x+1) \cdot 4$$

$$15x - 3 = 8x + 4 \qquad | \text{ -8x und +3}$$

$$7x = 7 \qquad | :7$$

$$x = 1$$

5. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

Hier wurde mit $12(x+3)$ multipliziert. Bei dieser Multiplikation hätte sich die Lösungsmenge um die Nullstellen des Terms, also um -3 vergrößern können.

Aber dies ist nicht der Fall.

1 gehört zum Definitionsbereich der Gleichung.

Lösungsmenge: $L = \{1\}$

Beispiel 19: $\frac{x+3}{4-6x} = \frac{x-4}{15x-10}$

WICHTIGES BEISPIEL mit Faktorisieren!

1. Schritt: Beide Nenner lassen sich durch Ausklammern faktorisieren:

1. Nenner: $4-6x = 2\cdot(2-3x)$

2. Nenner: $15x-10 = 5\cdot(3x-2)$.

Jetzt muss man noch erkennen, dass in den Klammern zwei Differenzen mit vertauschter Reihenfolge stehen, die man durch Ausklammern von -1 anpassen kann:

2. Nenner: $15x-10 = 5\cdot(3x-2) = -5(2-3x)$

Damit sieht die Gleichung so aus: $\frac{x+3}{2\cdot(2-3x)} = \frac{x-4}{-5\cdot(2-3x)}$

Dadurch werden die nächsten beiden Schritte wesentlich erleichtert.

2. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Wann werden die Nenner 0?

1. Nenner: $2(2-3x)=0 \;\Leftrightarrow\; 3x=2 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{2}{3}$

2. Nenner: $-5\cdot(2-3x)=0 \;\Leftrightarrow\; 3x=2 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{2}{3}$

Daher ist $\frac{2}{3}$ auszuschließen: $D=\mathbb{Q}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$

3. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Der gemeinsame Nenner muss die Faktoren 2, -5 und die Klammer (2 – 3x) enthalten: $HN = -10\cdot(2-3x)$

4. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$$\frac{x+3}{2\cdot(2-3x)} = \frac{x-4}{-5\cdot(2-3x)} \qquad |\cdot(-10)\cdot(2-3x)$$

$$\frac{x+3}{2\cdot(2-3x)}(-10)\cdot(2-3x) = \frac{x-4}{-5\cdot(2-3x)}(-10)\cdot(2-3x) \qquad |\text{ kürzen:}$$

$$\frac{x+3}{\cancel{2}\cdot\cancel{(2-3x)}}\cancel{(-10)}^{-5}\cdot\cancel{(2-3x)} = \frac{x-4}{\cancel{-5}\cdot\cancel{(2-3x)}}\cancel{(-10)}^{2}\cdot\cancel{(2-3x)}$$

$$-5\cdot(x+3) = 2\cdot(x-4)$$

$$-5x-15 = 2x-8 \qquad |\text{ -2x und +15}$$

$$-7x = 7 \qquad |:(-7)$$

$$x=-1$$

5. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

-1 gehört zum Definitionsbereich der Gleichung.

Lösungsmenge: $L=\{-1\}$

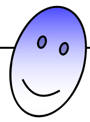
Beispiel 20: $\frac{x-6}{4x-8}+\frac{3}{3x-6}=0$ (1)

WICHTIGES BEISPIEL mit Faktorisieren!

1. Schritt: Beide Nenner lassen sich durch Ausklammern faktorisieren:

1. Nenner: $4x-8=4\cdot(x-2)$

2. Nenner: $3x-6=3\cdot(x-2)$.



Geänderte Gleichung: $\frac{x-6}{4\cdot(x-2)}+\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{3}\cdot(x-2)}=0$

Damit werden die nächsten beiden Schritte wesentlich erleichtert.

2. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Wann werden die Nenner 0?

1. Nenner: $4(x-2)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

2. Nenner: $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

Daher ist 2 auszuschließen: $D=\mathbb{Q}\setminus\{2\}$

3. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Der gemeinsame Nenner ist: $HN=4\cdot(x-2)$

4. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren und kürzen

$$\frac{x-6}{\cancel{4\cdot(x-2)}}\cancel{4\cdot(x-2)}+\frac{1}{\cancel{(x-2)}}\cdot 4\cdot\cancel{(x-2)}=0$$

$$x-6+4=0$$

$$x=2 \qquad (2)$$

$$L_2=\{2\}$$

5. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

2 gehört nicht zum Definitionsbereich der Gleichung.
Diese Lösung ist durch die Multiplikation mit dem Term $4(x-2)$ dazu gekommen.
Sie ist also keine Lösung der Anfangsgleichung:

Lösungsmenge: $L_1=\{\ \}$

Beispiel 21: $\frac{3x+4}{x+2} - \frac{2x+1}{2x+4} = \frac{4x+7}{2x+4}$ (1)

WICHTIGES BEISPIEL mit Faktorisieren!

1. Schritt: Die Nenner lassen sich durch Ausklammern faktorisieren:

2.und 3. Nenner: $2x+4 = 2(x+2)$

Danach sieht die Gleichung so aus: $\frac{3x+4}{x+2} - \frac{2x+1}{2(x+2)} = \frac{4x+7}{2(x+2)}$

2. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Die Nenner werden für 0 für $x = -2$

Daher ist -2 auszuschließen: $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$

3. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Der gemeinsame Nenner ist: $HN = 2(x+2)$

4. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$$\frac{3x+4}{x+2} - \frac{2x+1}{2(x+2)} = \frac{4x+7}{2(x+2)} \qquad | \cdot 2(x+2) \text{ und kürzen!}$$

$$\frac{3x+4}{\cancel{x+2}} \cdot 2\cancel{(x+2)} - \frac{2x+1}{\cancel{2(x+2)}} \cdot \cancel{2(x+2)} = \frac{4x+7}{\cancel{2(x+2)}} \cdot \cancel{2(x+2)}$$

$$(3x+4) \cdot 2 - (2x+1) = 4x+7 \qquad | \text{ Die 2. Klammer nicht vergessen!}$$

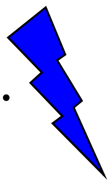
$$6x+8-2x-1 = 4x+7$$

$$4x+7 = 4x+7 \qquad (2)$$

Diese Gleichung ist allgemeingültig, d. h. jede Zahl ist Lösung!.

Die Lösungsmenge der Gleichung (2) ist somit $L_2 = \mathbb{Q}$.

5. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?



- -2 gehört nicht zum Definitionsbereich der Gleichung.

Diese Lösung ist durch die Multiplikation mit dem Term $2(x+2)$ dazu gekommen.

Sie gehört also nicht zur Lösung der Anfangsgleichung (1):

Lösungsmenge: $L_1 = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$

Trainingsgleichungen (Teil 2)

Bestimme die Lösungsmenge nach folgendem Schema:

1. Schritt: Bestimme den Definitionsbereich der Gleichung.

2. Schritt: Mache die Gleichung durch Multiplikation mit einem geeigneten Term bruchfrei

3. Schritt: Führe Äquivalenzumformen durch bis eine einfache Endgleichung erreicht ist, deren Lösung man erkennt.

4. Schritt: Überprüfe, ob die Lösungen der Endgleichungen zum Definitionsbereich der Anfangsgleichung gehören.

5. Schritt: Gib die Lösungsmenge der Anfangsgleichung an.

$\boxed{9}$ $\frac{4x-7}{2x+5}=12$

$\boxed{10}$ $\frac{5x+4}{5x+1}=1$

$\boxed{11}$ $\frac{4}{x}=\frac{8}{3-x}$

$\boxed{12}$ $\frac{2}{x+1}=\frac{5}{x-2}$

$\boxed{13}$ $\frac{12}{x-6}=\frac{4x}{6-x}$

$\boxed{14}$ $\frac{3x}{8x+4}+\frac{2x}{6x+3}=\frac{7}{12}$

$\boxed{15}$ $\frac{3x+1}{x+2}-\frac{x-2}{2x+6}=\frac{5}{2}$

$\boxed{16}$ $\frac{3}{x-3}+\frac{3}{3-x}=2x-6$

4.4 Schwierige Bruchgleichungen

Beispiel 22: $\frac{2x}{x+1}-\frac{3}{x-3}=2$

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Wann werden die Nenner 0?

1. Nenner: $x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1$
2. Nenner: $x-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=3$

Daher sind -1 und 3 auszuschließen: $D=\mathbb{Q}\setminus\{-1;3\}$

2. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Der Hauptnenner ist das Produkt der beiden Nenner:
$HN=(x+1)(x-3)$

3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$$\frac{2x}{x+1}-\frac{3}{x-3}=2 \qquad | \cdot(x-1)(x-3) \text{ und kürzen}$$

$$\frac{2x}{\cancel{x+1}}\cdot\cancel{(x+1)}(x-3)-\frac{3}{\cancel{x-3}}\cdot(x+1)\cancel{(x-3)}=2\cdot(x+1)(x-3)$$

$$2x(x-3)-3(x+1)=2(x+1)(x-3)$$

$$2x^2-6x-3x\boxed{-}3=2\left[x^2+x-3x-3\right]$$

$$2x^2-9x-3=2x^2-4x-6 \qquad | -2x^2 \quad !!!$$

$$-9x-3=-4x-6 \qquad | +4x+3$$

$$-5x=-3 \qquad | :(-5)$$

$$x=\tfrac{3}{5}$$

4. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

Weil $\frac{3}{5}$ zum Definitionsbereich der Gleichung gehört, ist sie Lösungszahl.

Lösungsmenge: $L=\left\{\frac{3}{5}\right\}$

Beispiel 23: $\frac{4x-5}{x-6}-\frac{x+1}{x+2}=3$

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Wann werden die Nenner 0?

1. Nenner: $x-6=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=6$

2. Nenner: $x+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-2$

Daher sind -2 und 6 auszuschließen: $D=\mathbb{Q}\setminus\{-2;6\}$

2. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Der Hauptnenner ist das Produkt der beiden Nenner:
$HN=(x+2)(x-6)$

3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$$\frac{4x-5}{x-6}-\frac{x+1}{x+2}=3 \qquad |\cdot(x+2)(x-6) \text{ und kürzen}$$

$$\frac{4x-5}{\cancel{x-6}}\cdot(x+2)\cancel{(x-6)}-\frac{x+1}{\cancel{x+2}}\cdot\cancel{(x+2)}(x-6)=3\cdot(x+2)(x-6)$$

$$(4x-5)(x+2)-(x+1)(x-6)=3(x+2)(x-6)$$

$$\left[4x^2-5x+8x-10\right]-\left[x^2+x-6x-6\right]=3\cdot\left[x^2+2x-6x-12\right]$$

$$4x^2+3x-10-x^2\boxed{+}5x\boxed{+}6=3x^2-12x-36$$

$$3x^2+8x-4=3x^2-12x-36 \qquad |-3x^2$$

$$8x-4=-12x-36 \qquad |+12x+4$$

$$20x=-32 \qquad |:2$$

$$x=-\frac{32}{20}=-\frac{8}{5}$$

4. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

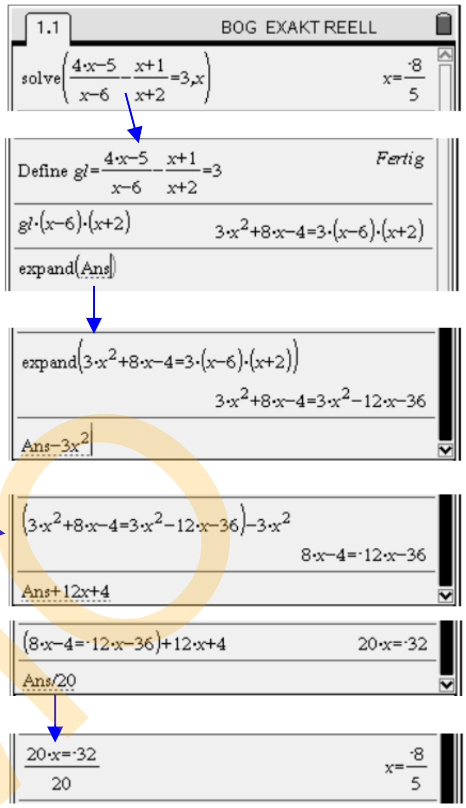
Weil $-\frac{8}{5}$ zum Definitionsbereich der Gleichung gehört, ist sie Lösungszahl.

Lösungsmenge: $L=\left\{-\frac{8}{5}\right\}$

ACHTUNG:

Auf der nächsten Seite zeige ich, wie man eine diesen Lösungsweg mit dem CAS-Rechner TI Nspire simulieren kann!

Einschub zu Beispiel 23
Simulation dieser Umformungen mit TI Nspire



Zuerst die direkte Lösung der Gleichung mit dem Befehl **solve**.

Wir wollen alle Umformungsschritte überprüfen.

Also definieren wir die Gleichung als **gl**.

Dann wird die Gleichung mit dem gemeinsamen Nenner $(x-6)(x+2)$ multipliziert. Das Ergebnis lassen wir durch **expand** vereinfachen. Nach enter wird **Ans** durch die letzte Anzeige ersetzt und man erhält:

Dann lasse ich $3x^2$ subtrahieren.

Nach enter wird **Ans** ersetzt und man erhält:

Schließlich wird geordnet, d.h. x nach links, die reinen Zahlen nach rechts (+12x und +4):

Die Division durch 20 liefert die Endgleichung:

Endgleichung: $x = -\frac{8}{5}$

Solche Ausdrücke wie im letzten Screenshot sind mathematisch gesehen blanker Unsinn. Denn man kann ja keinen Bruch erzeugen, der im Zähler ein Gleichheitszeichen enthält.

Aber die linke Seite dieser Darstellungen sind ja „nur“ Rechenbefehle und als solche akzeptiert sie Nspire. Der letzte Befehl lautet: Dividiere die Gleichung „20x = -32“ durch 20.
Die Antwort steht dann rechts.

Es ist eine Superleistung der Programmierer von Texas Instruments, dass sie diese Möglichkeit geschaffen haben, solche Umformungen durchführen zu können. Der CAS-Rechner ClassPad von CASIO kann das nicht. Da kommt bereits bei der Definition der Variablen gl eine Fehlermeldung, denn dieser Befehl enthält zwei Gleichheitszeichen, was er nicht verarbeiten kann.

Beispiel 24: $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} = 0$

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Wann werden die Nenner 0?

1. Nenner: $x+1=0 \Leftrightarrow \quad x=-1$

2. Nenner: $x-2=0 \Leftrightarrow \quad x=2$

3. Nenner: $x-1=0 \Leftrightarrow \quad x=1$

Daher sind -1, 1 und 2 auszuschließen: $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1;1;2\}$

2. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Der Hauptnenner ist das Produkt der drei Nenner: $HN = (x+1)(x-2)(x-1)$

3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} = 0 \qquad | \cdot (x+1)(x-2)(x-1) \text{ und kürzen}$$

$$\frac{1}{\cancel{x+1}} \cdot \cancel{(x+1)}(x-2)(x-1) - \frac{2}{\cancel{x-2}} \cdot (x+1)\cancel{(x-2)}(x-1) + \frac{1}{\cancel{x-1}} \cdot (x+1)(x-2)\cancel{(x-1)} = 0$$

$$(x-2)(x-1) - 2(x+1)(x-1) + (x+1)(x-2) = 0$$

Nun werden die Klammern miteinander multipliziert.

Für die roten Klammern wendet man die 3. binomische Formel an!

$$\left[x^2 - 2x - x + 2\right] - 2\left[x^2 - 1\right] + \left[x^2 + x - 2x - 2\right] = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 - 2x^2 \boxed{+2} + x^2 - x - 2 = 0 \qquad \text{Vorzeichen!}$$

Nun fällt glücklicherweise x^2 weg:

$$-4x + 2 = 0$$

$$4x = 2$$

$$x = \tfrac{1}{2}$$

4. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

Weil $\frac{1}{2}$ zum Definitionsbereich der Gleichung gehört, ist sie Lösungszahl.

Lösungsmenge: $L = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Die Schwierigkeit besteht bei dieser Rechnung hauptsächlich darin, nach dem Kürzen die Klammern richtig zu multiplizieren und dabei die Vorzeichen richtig zu setzen.
Dann muss man korrekt zusammenfassen.

Beispiel 25: $\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x+2}=\frac{4}{x-1}$

1. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Wann werden die Nenner 0?

1. Nenner: $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$

2. Nenner: $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

3. Nenner: $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Daher sind -2, 1 und 4 auszuschließen: $D=\mathbb{Q}\setminus\{-2;1;4\}$

2. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Der Hauptnenner ist das Produkt der drei Nenner: $HN=(x-4)(x+2)(x-1)$

3. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$$\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x+2}=\frac{4}{x-1} \qquad |\cdot(x-4)(x+2)(x-1) \text{ und kürzen}$$

$$\frac{1}{\cancel{x-4}}\cdot\cancel{(x-4)}(x+2)(x-1)+\frac{3}{\cancel{x+2}}\cdot(x-4)\cancel{(x+2)}(x-1)=\frac{4}{\cancel{x-1}}\cdot(x-4)(x+2)\cancel{(x-1)}$$

$$(x+2)(x-1)+3\cdot(x-4)(x-1)=4\cdot(x-4)(x+2)$$

$$\left[x^2+2x-x-2\right]+3\cdot\left[x^2-4x-x+4\right]=4\cdot\left[x^2-4x+2x-8\right]$$

$$x^2+x-2+3x^2-15x+12=4x^2-8x-32$$

$$4x^2-14x+10=4x^2-8x-32 \qquad | -4x^2 \text{ !!!}$$

$$-14x+10=-8x-32 \qquad | +8x-10$$

$$-6x=-42 \qquad | (-6)$$

$$x=7$$

4. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

Weil 7 zum Definitionsbereich der Gleichung gehört, ist sie Lösungszahl

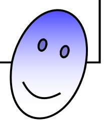
Lösungsmenge: $L=\{7\}$

Beispiel 26: $\frac{4x}{x-3}-\frac{x}{x+3}=\frac{3x^2}{x^2-9}$

1. Schritt : Faktorisieren des Nenners der rechten Seite

Man muss erkennen, dass für diese Nenner gilt:

$x^2-9=(x-3)(x+3)$



Damit sieht die Gleichung so aus: $\frac{4x}{x-3}-\frac{x}{x+3}=\frac{3x^2}{(x-3)(x+3)}$

2. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Wann werden die Nenner 0?

1. Nenner: $x-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=3$
2. Nenner: $x+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-3$
3. Nenner: $(x-3)(x+3)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=3$ oder $x=-3$

Daher sind 3 und – 3 auszuschließen: $D=\mathbb{Q}\setminus\{\pm 3\}$

3. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Der gemeinsame Nenner ist: $HN=(x-3)(x+3)$

4. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$$\frac{4x}{x-3}-\frac{x}{x+3}=\frac{3x^2}{(x-3)(x+3)} \qquad |\cdot(x-3)(x+3) \text{ und kürzen!}$$

$$\frac{4x}{\cancel{x-3}}\cdot\cancel{(x-3)}(x+3)-\frac{x}{\cancel{x+3}}\cdot(x-3)\cancel{(x+3)}=\frac{3x^2}{\cancel{(x-3)(x+3)}}\cdot\cancel{(x-3)(x+3)}$$

$$4x\cdot(x+3)-x(x-3)=3x^2$$

$$4x^2+12x-x^2-3x=3x^2 \qquad |-3x^2$$

$$12x-3x=0$$

$$9x=0 \qquad |:9$$

$$x=0$$

5. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

Weil 0 zum Definitionsbereich der Gleichung gehört, kommt sie als Lösung in Frage:

Lösungsmenge: $L=\{0\}$

Beispiel 27: $\dfrac{2x}{x+5}-\dfrac{x^2-3x+60}{x^2-25}=\dfrac{x-12}{x-5}$ (1)

1. Schritt : Faktorisieren des Nenners der rechten Seite

Merkmal: $x^2-25=(x-5)(x+5)$

Damit sieht die Gleichung so aus: $\dfrac{2x}{x+5}-\dfrac{x^2-3x+60}{(x+5)(x-5)}=\dfrac{x-12}{x-5}$

2. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Wann werden die Nenner 0?

1. Nenner: $x+5=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-5$

2. Nenner: $(x-5)(x+5)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=5$ oder $x=-5$

3. Nenner: $x-5=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=5$

Daher sind 5 und –5 auszuschließen: $D=\mathbb{Q}\setminus\{\pm 5\}$

3. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Der gemeinsame Nenner ist: $(x-5)(x+5)$

4. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$$\frac{2x}{x+5}-\frac{x^2-3x+60}{(x+5)(x-5)}=\frac{x-12}{x-5} \qquad |\cdot(x+5)(x-5) \text{ und kürzen}$$

$$\frac{2x}{\cancel{x+5}}\cdot\cancel{(x+5)}\,(x-5)-\frac{x^2-3x+60}{\cancel{(x+5)(x-5)}}\cdot\cancel{(x+5)(x-5)}=\frac{x-12}{\cancel{x-5}}\cdot(x+5)\,\cancel{(x-5)}$$

$$2x(x-5)-\left(x^2-3x+60\right)=(x-12)(x+5)$$

$$2x^2-10x-x^2\boxed{+}3x\boxed{-}60=x^2-12x+5x+10$$

$$x^2-7x-60=x^2-7x-60 \qquad (2)$$

Diese Gleichung ergibt für jede eingesetzte Zahl eine wahre Aussage.

Sie heißt daher allgemeingültig und hat als Lösungsmenge $L_2=\mathbb{Q}$.

5. Schritt: Gehören die Lösungen zum Definitionsbereich?

Die Antwort heißt klar „Nein".

Die Zahlen 5 und – 5 gehören nicht zum Definitionsbereich der Gleichung und können daher auch keine Lösung sein.

Sie kamen durch die Multiplikation mit dem Term $(x-5)(x+5)$ dazu.

Lösungsmenge: $L=\mathbb{Q}\setminus\{\pm 5\}$

Beispiel 28: $\dfrac{2x^2}{x^2+4x}-\dfrac{5x+4}{3x+12}=\dfrac{x-5}{3x}$ (1)

1. Schritt : Faktorisieren der Nenner der linken Seite

$x^2+4x=x\cdot(x+4)$ und $3x+12=3\cdot(x+4)$

Damit sieht die Gleichung so aus: $\dfrac{2x^2}{x(x+4)}-\dfrac{x+4}{3(x+4)}=\dfrac{x-5}{3x}$

2. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Wann werden die Nenner 0?

1. Nenner: $x\cdot(x+4)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0$ oder $x=-4$

2. Nenner: $3(x+4)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-4$

3. Nenner: $3x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0$

Daher sind 0 und –4 auszuschließen: $D=\mathbb{Q}\setminus\{\,0\,;-4\,\}$

3. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Der gemeinsame Nenner ist: $HN=3x\cdot(x+4)$

4. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$$\frac{2x^2}{x(x+4)}-\frac{5x-4}{3(x+4)}=\frac{x-5}{3x} \qquad |\cdot 3x\cdot(x+4) \text{ und kürzen!}$$

$$\frac{2x^2}{\cancel{x(x+4)}}\cdot 3\cancel{x\cdot(x+4)}-\frac{5x-4}{\cancel{3(x+4)}}\cdot\cancel{3}x\cdot\cancel{(x+4)}=\frac{x-5}{\cancel{3x}}\cdot\cancel{3x}\cdot(x+4)$$

$$6x^2-(5x-4)\cdot x=(x-5)(x+4)$$

$$6x^2-5x^2+4x=x^2-5x+4x-20$$

$$x^2+4x=x^2-x-20 \qquad |-x^2+x$$

$$5x=-20 \qquad |:(-5)$$

$$x=-4 \qquad (2)$$

5. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

Die Antwort heißt klar „Nein"!
Die Zahl –4 gehört nicht zum Definitionsbereich der Gleichung und kann daher auch keine Lösung sein.

Sie kam durch die Multiplikation mit dem Term $\cdot 3x\cdot(x+4)$ dazu.

Die Lösungsmenge von (2) ist zwar $L_2=\{-4\}$, aber für (1) gilt:

Lösungsmenge: $L_1=\{\ \}$

Beispiel 29: $\frac{2}{x+1}+\frac{3x}{x^2+2x+1}-\frac{5}{x-1}=0$ (1)

1. Schritt: Faktorisieren des 2. Nenners der linken Seite:

Merkmal: $x^2+2x+1=(x+1)^2$

Damit sieht die Gleichung so aus: $\frac{2}{x+1}+\frac{3x}{(x+1)^2}-\frac{5}{x-1}=0$

2. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Wann werden die Nenner 0?

1. Nenner: $x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1$

2. Nenner: $(x+1)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x+1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1$

3. Nenner: $x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$

Daher sind 1 und –1 auszuschließen: $D=\mathbb{Q}\setminus\{\pm 1\}$

3. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Der gemeinsame Nenner ist: $HN=(x+1)^2\cdot(x-1)$

4. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3x}{(x+1)^2}-\frac{5}{x-1}=0 \qquad |\cdot(x+1)^2\cdot(x-1) \text{ und kürzen!}$$

$$\frac{2}{\cancel{x+1}}\cdot(x+1)^{\cancel{2}}\cdot(x-1)+\frac{3x}{\cancel{(x+1)^2}}\cdot\cancel{(x+1)^2}\cdot(x-1)-\frac{5}{\cancel{x-1}}\cdot(x+1)^2\cdot\cancel{(x-1)}=0$$

$$2\cdot(x^2-1)+3x\cdot(x-1)-5(x^2+2x+1)=0$$

$$\cancel{2x^2}-2+\cancel{3x^2}-3x-\cancel{5x^2}-10x-5=0$$

$$-13x-7=0$$

$$13x=-7$$

$$x=-\tfrac{7}{13}$$

5. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

Die Zahl $-\frac{7}{13}$ gehört zum Definitionsbereich der Gleichung und ist daher auch Lösung der Ausgangsgleichung!

Lösungsmenge: $L_1=\left\{-\frac{7}{13}\right\}$

Beispiel 30: $\frac{x}{x+3}+\frac{2}{x+4}=\frac{6}{x^2+7x+12}$ (1)

Diese Gleichung hat zwei Schwierigkeiten aufzuweisen. Zum einen verwirrt der dritte Nenner $x^2+7x+12$. Daher ein Tipp zu Beginn. Oftmals sind solche Aufgaben so gemacht, dass alle Nenner irgendetwas miteinander zu tun haben. Und hier sollte man daher nach gründlichem Hinsehen <u>vermuten</u>, dass vielleicht $(x+3)(x+4)=x^2+7x+12$ sein könnte.
Und so ist es auch, wie man sofort durch Ausmultiplizieren feststellt!

1. Schritt : Faktorisieren eines Nenners der linken Seite

$x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$ siehe oben.

Damit sieht die Gleichung so aus: $\frac{x}{x+3}+\frac{2}{x+4}=\frac{6}{(x+3)(x+4)}$

2. Schritt: Definitionsbereich bestimmen

Wann werden die Nenner 0?

1. Nenner: $x+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-3$

2. Nenner: $x+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-4$

3. Nenner: $(x+3)(x+4)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-3$ oder $x=-4$

Daher sind -3 und –4 auszuschließen: $D=\mathbb{Q}\setminus\{-3;-4\}$

3. Schritt: Hauptnenner bestimmen

Der gemeinsame Nenner ist: $HN=(x+3)(x+4)$

4. Schritt: Nenner beseitigen: Mit dem Hauptnenner multiplizieren

$\frac{x}{x+3}+\frac{2}{x+4}=\frac{6}{(x+3)(x+4)}$ | $(x+3)(x+4)$ und kürzen!

$$\frac{x}{\cancel{x+3}}\cdot\cancel{(x+3)}(x+4)+\frac{2}{\cancel{x+4}}\cdot(x+3)\cancel{(x+4)}=\frac{6}{\cancel{(x+3)(x+4)}}\cdot\cancel{(x+3)(x+4)}$$

$x(x+4)+2(x+3)=6$

$x^2+4x+2x+6=6$ | -6

$x^2+6x=0$

Weil außer 0 keine reine Zahl (ohne x) vorkommt, kann man x ausklammern zu:

$x(x+6)=0$

Dies ist ein Nullprodukt, das nur dann Null wird, wenn ein Faktor Null wird.

1. Möglichkeit: x = 0, 2. Möglichkeit $x+6=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-6$.

5. Schritt: Gehört die Lösung zum Definitionsbereich?

Beide Zahlen gehören zum Definitionsbereich, also folgt $L=\{0;-6\}$.

Abschließender Hinweis

Bis auf Beispiel 30 wurden hier nur solche Gleichungen vorgestellt, deren Endgleichungen kein x^2 enthielten.

Das ist wichtig, denn wenn dies auftritt, liegt eine quadratische Gleichung vor. Wie man diese löst in der Regel Stoff der Klassenstufe 9.

Leicht zu lösen sind quadratische Gleichungen „ohne Absolutglied" wie zuletzt gesehen:

$x^2+6x=0$. Hier klammert man x aus und erhält ein Nullprodukt: $x(x+6)=0$
und aus deren Faktoren man dann wie gezeigt die Lösungszahlen bekommt.

Andere quadratische Gleichungen löst anders.

Hier ein Beispiel aus dem Text Nummer 12240 (Bruchgleichungen 2)

$$\frac{x+2}{x-1}+\frac{1}{2}=x$$

Definitionsbereich: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Hauptnenner: $2\cdot(x-1)$ multiplizieren:

Nenner beseitigen: $\frac{x+2}{x-1}+\frac{1}{2}=x \quad | \ 2\cdot(x-1)$

$$\frac{x+2}{\cancel{x-1}}\cdot 2\cdot\cancel{(x-1)}+\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot(x-1)=x\cdot 2\cdot(x-1)$$

$$2(x+2)+x-1=2x(x-1)$$

$$2x+4+x-1=2x^2-2x$$

Nach rechts ordnen: $0=2x^2-5x-3$

Seiten vertauschen: $2x^2-5x-3=0$

WISSEN (ab Klasse 9): Die quadratische Gleichung $ax^2+bx+c=0$ hat die

Lösung: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Wendet man diese Formel an, folgt (mit a=2, b=-5 und c=-3):

$$x_{1,2}=\frac{+5\pm\sqrt{25-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}=\frac{+5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{+5\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{5\pm 7}{4}=\begin{cases}3\\ -\frac{1}{2}\end{cases}$$

Da beide Zahlen dem Definitionsbereich angehören, gilt $L=\{3\,;-\frac{1}{2}\}$

Solche Aufgaben kann man in 12240 üben!

Trainingsgleichungen (Teil 3)

Bestimme die Lösungsmenge nach folgendem Schema:

1. Schritt: Bestimme den Definitionsbereich der Gleichung.

2. Schritt: Mache die Gleichung durch Multiplikation mit einem geeigneten Term bruchfrei

3. Schritt: Führe Äquivalenzumformen durch bis eine einfache Endgleichung erreicht ist, deren Lösung man erkennt.

4. Schritt: Überprüfe, ob die Lösungen der Endgleichungen zum Definitionsbereich der Anfangsgleichung gehören.

5. Schritt: Gib die Lösungsmenge der Anfangsgleichung an.

17 $\frac{4x}{x+2}-\frac{2x}{x+5}=2$

18 $\frac{x-8}{x+8}-\frac{x+4}{x-4}=\frac{-48}{x^2+12x-32}$

19 $\frac{2}{x+3}+\frac{8}{x-3}=\frac{10x}{x^2-9}$

20 $\frac{4x^2}{x^2-6x}-\frac{x+1}{2x-12}=\frac{7}{2}$

21 $\frac{2}{x^2+4x+4}-\frac{x-1}{x+2}=-1$

22 $\frac{3x}{x+1}-\frac{2x}{x-3}=\frac{x^2-11x}{x^2-2x-3}$

23 $\frac{3x}{x^2-4}-\frac{2{,}5\cdot x}{5x+10}=\frac{x-1}{4-2x}$

24 $\frac{3x+1}{x+4}+\frac{3x-1}{3x-6}-\frac{4x^2}{x^2+2x-8}=0$

5. Lösungen aller Trainingsgleichungen in Kurzform

$\boxed{1}$ $\frac{4}{x}-\frac{3}{2x}=6$

$\boxed{2}$ $\frac{24}{x}=\frac{36}{x}$

$\boxed{3}$ $\frac{8}{x-5}=2$

$\boxed{4}$ $\frac{4}{x+2}-8=0$

$\boxed{5}$ $\frac{4x}{x+1}=4$

$\boxed{6}$ $\frac{3}{x+2}=\frac{5}{x+2}$

$\boxed{7}$ $\frac{x-18}{x-6}=\frac{x+2}{x-6}+10$

$\boxed{8}$ $\frac{x-13}{x+3}=\frac{2x-10}{x+3}-1$

$\boxed{9}$ $\frac{4x-7}{2x+5}=12$

$\boxed{10}$ $\frac{5x+4}{5x+1}=1$

$\boxed{11}$ $\frac{4}{x}=\frac{8}{3-x}$

$\boxed{12}$ $\frac{2}{x+1}=\frac{5}{x-2}$

$\boxed{13}$ $\frac{12}{x-6}=\frac{4x}{6-x}$

$\boxed{14}$ $\frac{3x}{8x+4}+\frac{2x}{6x+3}=\frac{7}{12}$

$\boxed{15}$ $\frac{3x+1}{x+2}-\frac{x-2}{2x+6}=\frac{5}{2}$

$\boxed{16}$ $\frac{3}{x-3}+\frac{3}{3-x}=2x-6$

$\boxed{17}$ $\frac{4x}{x+2}-\frac{2x}{x+5}=2$

$\boxed{18}$ $\frac{x-8}{x+8}-\frac{x+4}{x-4}=\frac{-48}{x^2+12x-32}$

$\boxed{19}$ $\frac{2}{x+3}+\frac{8}{x-3}=\frac{10x}{x^2-9}$

$\boxed{20}$ $\frac{4x^2}{x^2-6x}-\frac{x+1}{2x-12}=\frac{7}{2}$

$\boxed{21}$ $\frac{2}{x^2+4x+4}-\frac{x+1}{x+2}=-1$

$\boxed{22}$ $\frac{3x}{x+1}-\frac{2x}{x-3}=\frac{x^2-11x}{x^2-2x-3}$

$\boxed{23}$ $\frac{3x}{x^2-4}-\frac{2{,}5\cdot x}{5x+10}=\frac{x-1}{4-2x}$

$\boxed{24}$ $\frac{3x+1}{x+4}+\frac{3x-1}{3x-6}-\frac{4x^2}{x^2+2x-8}=0$

$\boxed{1}$ $\frac{4}{x}-\frac{3}{2x}=6$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$

Mal Hauptnenner: 2x

$\frac{4}{\cancel{x}}\cdot 2\cancel{x}-\frac{3}{\cancel{2x}}\cdot\cancel{2x}=6\cdot 2x$

$8-3=12x$

$12x=5$

$x=\frac{5}{12}$

$\frac{5}{12}\in D$ also $L=\{\frac{5}{12}\}$

$\boxed{2}$ $\frac{24}{x}=\frac{36}{x}$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$

Mal Hauptnenner: x

$\frac{24}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}=\frac{36}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}$

$24=36$

Falsche Aussage

$L=\{\ \}$

$\boxed{3}$ $\frac{8}{x-5}=2$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{5\}$

Mal Nenner: (x-5)

$\frac{8}{\cancel{x-5}}\cdot\cancel{(x-5)}=2\cdot(x-5)$

$8=2x-10$

$2x=18$

$x=9$

$9\in D \Rightarrow L=\{9\}$

$\boxed{4}$ $\frac{4}{x+2}-8=0$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{-2\}$

Mal Nenner (x+2)

$\frac{4}{\cancel{x+2}}\cdot\cancel{(x+2)}-8\cdot(x+2)=0$

$4-8x-16=0$

$-8x=12$ | :(-8)

$x=\frac{12}{-8}=-\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2}\in D \Rightarrow L=\{-\frac{3}{2}\}$

$\boxed{5}$ $\frac{4x}{x+1}=4$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$

Mal Nenner: (x+1)

$\frac{4x}{\cancel{x+1}}\cdot\cancel{(x+1)}=4\cdot(x+1)$

$4x=4x+4$ | -4x

$0=4$

Falsche Aussage!

$L=\{\ \}$

$\boxed{6}$ $\frac{3}{x+2}=\frac{5}{x+2}$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{-2\}$

Mal Nenner: (x+2)

$\frac{3}{\cancel{x+2}}\cdot\cancel{(x+2)}=\frac{5}{\cancel{x+2}}\cdot\cancel{(x+2)}$

$3=5$

Falsche Aussage!

$L=\{\ \}$

$\boxed{7}$ $\frac{x-18}{x-6}=\frac{x+2}{x-6}+10$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{6\}$

Mal Nenner (x-6):

$\frac{x-18}{\cancel{x-6}}\cdot\cancel{(x-6)}=\frac{x+2}{\cancel{x-6}}\cdot\cancel{(x-6)}+10\cdot(x-6)$

$x-18=x+2+10x-60$

$x-18=11x-58$ | -x +58

$40=10x$ | :4

$x=4$

$4\in D \Rightarrow L=\{4\}$

$\boxed{8}$ $\frac{x-13}{x+3}=\frac{2x-10}{x+3}-1$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{-3\}$

Mal Nenner (x+3):

$\frac{x-13}{\cancel{x+3}}\cdot\cancel{(x+3)}=\frac{2x-10}{\cancel{x+3}}\cdot\cancel{(x+3)}-1\cdot(x+3)$

$x-13=2x-10-x-3$

$x-13=x-13$

Dies wird für alle $x\in Q$ zu einer wahren Aussage.

Wegen $-3\notin \mathbf{D} \Rightarrow L=\mathbb{Q}\setminus\{-3\}$

9 $\frac{4x-7}{2x+5}=12$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{-\frac{5}{2}\}$

Mal Nenner (2x+5):

$\frac{4x-7}{\cancel{2x+5}}\cancel{(2x+5)}=12\cdot(2x+5)$

$4x-7=24x+60$ | -24x +7

$-20x=67$ | :(-20)

$x=\frac{67}{-20}=-\frac{67}{20}$

Da $-\frac{67}{20}\in\mathbf{D}$ $\Rightarrow$ $L=\{-\frac{67}{20}\}$

10 $\frac{5x+4}{5x+1}=1$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{-\frac{1}{5}\}$

Mal Nenner (5x+1):

$\frac{5x+4}{\cancel{5x+1}}\cdot\cancel{(5x+1)}=1\cdot(5x+1)$

$5x+4=5x+1$ | -5x

$4=1$

Falsche Aussage!

$L=\{\ \}$

11 $\frac{4}{x}=\frac{8}{3-x}$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;3\}$

Mal Hauptnenner $x(3-x)$:

$\frac{4}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}(3-x)=\frac{8}{\cancel{3-x}}\cdot x\cancel{(3-x)}$

$12-4x=8x$ | +4x

$12=12x$ | :12

$x=1$

Da $1\in D$ $\Rightarrow$ $L=\{1\}$

12 $\frac{2}{x+1}=\frac{5}{x-2}$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{-1;2\}$

Mal Hauptnenner $(x+1)(x-2)$:

$\frac{2}{\cancel{x+1}}\cdot\cancel{(x+1)}(x-2)=\frac{5}{\cancel{x-2}}\cdot(x+1)\cancel{(x-2)}$

$2x-4=5x+5$ | -5x + 4

$-3x=9$ | :(-3)

$x=-3$

Da $-3\in D$ $\Rightarrow$ $L=\{-3\}$

13 $\frac{12}{x-6}=\frac{4x}{6-x}$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{6\}$

Rechts im Nenner Differenz vertauschen:

$\frac{12}{x-6}=\frac{4x}{-(x-6)}$ | $\cdot(x-6)$

$\frac{12}{\cancel{x-6}}\cdot\cancel{(x-6)}=\frac{4x}{-\cancel{(x-6)}}\cdot\cancel{(x-6)}$

$12=-4x$ | :(-4)

$x=\frac{12}{-4}=-3$

Da $-3\in D$ $\Rightarrow$ $L=\{-3\}$

14 $\frac{3x}{8x+4}+\frac{2x}{6x+3}=\frac{7}{12}$

Nenner faktorisieren:

$\frac{3x}{4(2x+1)}+\frac{2x}{3(2x+1)}=\frac{7}{12}$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$

Mal Hauptnenner $12\cdot(2x+1)$:

$\frac{3x}{\cancel{4}\cancel{(2x+1)}}\cdot\cancel{12}^{3}\cdot\cancel{(2x+1)}+\frac{2x}{\cancel{3}\cancel{(2x+1)}}\cdot\cancel{12}^{4}\cdot\cancel{(2x+1)}=\frac{7}{\cancel{12}}\cdot\cancel{12}\cdot(2x+1)$

$9x+8x=14x+7$ | -14x

$3x=7$ | :3

$x=\frac{7}{3}$

Da $\frac{7}{3}\in D$ $\Rightarrow$ $L=\{\frac{7}{3}\}$

$\boxed{15}$ $\frac{3x+1}{x+2}-\frac{x-2}{2x+6}=\frac{5}{2}$

Nenner faktorisieren:

$\frac{3x+1}{x+2}-\frac{x-2}{2(x+3)}=\frac{5}{2}$ Jetzt sieht man: $D=\mathbb{Q}\setminus\{-2;-3\}$

Mal Hauptnenner $2(x+2)(x+3)$:

$$\frac{3x+1}{\cancel{x+2}}\cancel{2(x+2)}(x+3)-\frac{x-2}{\cancel{2(x+3)}}\cancel{2(x+3)}(x+2)=\frac{5}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}(x+2)(x+3)$$

$$2(3x+1)(x+3)-(x-2)(x+2)=5(x+2)(x+3)$$

$$2\left(3x^2+x+9x+3\right)-\left[x^2-4\right]=5\left(x^2+2x+3x+6\right)$$

$$6x^2+20x+6-x^2+4=5x^2+25x+30$$

$5x^2+20x+10=5x^2+25x+30$ | $-x^2-25x-10$

$-5x=20$ | :(-5)

$x=\frac{20}{-5}=-4$

Da $-4\in D \Rightarrow L=\{-4\}$

$\boxed{16}$ $\frac{3}{x-3}+\frac{3}{3-x}=2x-6$

2. Nenner: Differenz vertauschen:

$\frac{3}{x-3}+\frac{3}{-(x-3)}=2x-6$ Jetzt: $D=\mathbb{Q}\setminus\{3\}$

$$\underbrace{\frac{3}{x-3}-\frac{3}{(x-3)}}_{=0}=2x-6$$

Also lautet die Gleichung nur noch $2x-6=0$

Daraus: $2x=6$ und $x=3$

Weil $3\notin D \Rightarrow L=\{\ \}$.

Hier sieht man noch einmal sehr schön, dass durch die Multiplikation mit dem Nennerterm $x-3$ dessen Nullstelle als Lösung dazu kommt.

Weil aber der Nenner nicht Null werden darf, muss man diese Lösung wieder verbieten!

17 $\frac{4x}{x+2} - \frac{2x}{x+5} = 2$ $\qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; -5\}$

Mal Hauptnenner: $\qquad (x+2)(x+5)$

$$\frac{4x}{\cancel{x+2}} \cdot \cancel{(x+2)}(x+5) - \frac{2x}{\cancel{x+5}} \cdot (x+2)\cancel{(x+5)} = 2 \cdot (x+2)(x+5)$$

$$4x(x+5) - 2x \cdot (x+2) = 2\left(x^2 + 2x + 5x + 10\right)$$

$$4x^2 + 20x - 2x^2 - 4x = 2x^2 + 14x + 20$$

$$\cancel{2x^2} + 16x = \cancel{2x^2} + 14x + 20 \qquad | -14x$$

$$2x = 20 \qquad | :2$$

$$x = 10$$

Da $10 \in D \quad \Rightarrow \quad L = \{10\}$

18 $\frac{x-8}{x+8} - \frac{x+4}{x-4} = \frac{-48}{x^2+4x-32}$ $\qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{-8; 4\}$

Erkennen: $\quad (x+8)(x-4) = x^2 + 8x - 4x - 32 = x^2 + 4x - 32$!!!!

Ergibt: $\quad \frac{x-8}{x+8} - \frac{x+4}{x-4} = \frac{-48}{(x+8)(x-4)}$

Mit dem Hauptnenner multiplizieren: $\qquad (x+8)(x-4)$

$$\frac{x-8}{\cancel{x+8}} \cdot \cancel{(x+8)}(x-4) - \frac{x+4}{\cancel{x-4}} \cdot (x+8)\cancel{(x-4)} = \frac{-48}{\cancel{(x+8)(x-4)}} \cdot \cancel{(x+8)(x-4)}$$

$$(x-8)(x-4) - (x+4)(x+8) = -48$$

$$x^2 - 8x - 4x + 32 - \left[x^2 + 4x + 8x + 32\right] = -48$$

$$x^2 - 12x + 32 - x^2 - 12x - 32 = -48$$

$$-24x = -48 \qquad | :(-24)$$

$$x = 2$$

Da $2 \in D \quad \Rightarrow \quad L = \{2\}$

19 $\frac{2}{x+3}+\frac{8}{x-3}=\frac{10x}{x^2-9}$

Nenner der rechten Seite mit der 3. binomischen Formel faktorisieren:

$\frac{2}{x+3}+\frac{8}{x-3}=\frac{10x}{(x+3)(x-3)}$ Daraus folgt: $D=\mathbb{Q}\setminus\{\pm 3\}$

Mal Hauptnenner: $(x+3)(x-3)$:

$$\frac{2}{\cancel{x+3}}\cdot\cancel{(x+3)}(x-3)+\frac{8}{\cancel{x-3}}\cdot(x+3)\cancel{(x-3)}=\frac{10x}{\cancel{(x+3)(x-3)}}\cdot\cancel{(x+3)(x-3)}$$

$2(x-3)+8(x+3)=10x$

$2x-6+8x+24=10x$ | -10x

$18=0$

Falsche Aussage, also $L=\{\ \}$

20 $\frac{4x^2}{x^2-6x}-\frac{x+1}{2x-12}=\frac{7}{2}$

Faktorisieren:

$\frac{4x^2}{x(x-6)}-\frac{x+1}{2(x-6)}=\frac{7}{2}$ Jetzt: $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;6\}$

Mal Hauptnenner $2x\cdot(x-6)$

$$\frac{4x^2}{\cancel{x(x-6)}}\cdot 2\cancel{x\cdot(x-6)}-\frac{x+1}{\cancel{2}\cancel{(x-6)}}\cdot\cancel{2}x\cdot\cancel{(x-6)}=\frac{7}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot x(x-6)$$

$4x^2\cdot 2-(x+1)\cdot x=7x(x-6)$

$8x^2-x^2-x=7x^2-42x$

$\cancel{7x^2}-x=\cancel{7x^2}-42x$ | +42x

$41x=0$

$x=0$

Da $0\notin D \Rightarrow L=\{\ \}$!!!

$\boxed{21}$

$$\frac{2}{x^2+4x+4}-\frac{x+1}{x+2}=-1$$

1. Nenner faktorisieren. Nach der 1. Binomischen Formel gilt $(x+2)^2=x^2+4x+4$

$$\frac{2}{(x+2)^2}-\frac{x+1}{x+2}=-1$$ Also ist $D=\mathbb{Q}\setminus\{-2\}$

Mal Hauptnenner $(x+2)^2$:

$$\frac{2}{\cancel{(x+2)^2}}\cancel{(x+2)^2}-\frac{x+1}{\cancel{x+2}}(x+2)^{\cancel{2}}=-1\cdot(x+2)^2$$

$$2-(x+1)(x+2)=-(x+2)^2$$

$$2-\left[x^2+x+2x+2\right]=-\left[x^2+4x+4\right]$$

$$2-x^2-3x-2=-x^2-4x-4 \qquad |+x^2+4x$$

$$x=-4$$

Da $-4\in D \quad\Rightarrow\quad L=\{-4\}$

$\boxed{22}$

$$\frac{3x}{x+1}-\frac{2x}{x-3}=\frac{x^2-11x}{x^2-2x-3} \qquad (1)$$

Versuchsrechnung: $(x+1)(x-3)=x^2+x-3x-3=x^2-2x-3$

Also kann man den Nenner rechts faktorisieren:

$$\frac{3x}{x+1}-\frac{2x}{x-3}=\frac{x^2-11x}{(x+1)(x-3)}$$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{-1;3\}$

Mal Hauptnenner $(x+1)(x-3)$:

$$\frac{3x}{\cancel{x+1}}\cdot\cancel{(x+1)}(x-3)-\frac{2x}{\cancel{x-3}}\cdot(x+1)\cancel{(x-3)}=\frac{x^2-11x}{\cancel{(x+1)(x-3)}}\cdot\cancel{(x+1)(x-3)}$$

$$3x\cdot(x-3)-2x\cdot(x+1)=x^2-11x$$

$$3x^2-9x-2x^2-2x=x^2-11x$$

$$x^2-11x=x^2-11x \qquad (2)$$

Die Gleichung (2) liefert für jede Zahl wahre Aussage.

Wegen $D=\mathbb{Q}\setminus\{-1;3\}$ muss man aber -1 und 3 für die Lösungsmenge von (1) ausschließen, daher gilt: $L=D=\mathbb{Q}\setminus\{-1;3\}$!!!

23 $\frac{3x}{x^2-4}-\frac{2,5\cdot x}{5x+10}=\frac{x-1}{4-2x}$

Faktorisierung der Nenner:

1. Nenner: $x^2-4=(x+2)(x-2)$ (3. Binomische Formel)

2. Nenner: $5x+10=5\cdot(x+2)$

3. Nenner $4-2x=-(2x-4)=-2(x-2)$

(Zuerst unter Zufügen eines Minuszeichens die Differenz vertauschen, dann noch 2 ausklammern, oder gleich -2 ausklammern!

$$\frac{3x}{(x+2)(x-2)}-\frac{2,5\cdot x}{5(x+2)}=\frac{x-1}{-2(x-2)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{3x}{(x+2)(x-2)}-\frac{2,5\cdot x}{5(x+2)}=-\frac{x-1}{2(x-2)}$$

Definitionsbereich: $\mathbf{D}=\mathbb{Q}\setminus\{\pm 2\}$

Multiplikation mit dem Hauptnenner $10\cdot(x+2)(x-2)$:

$$\frac{3x}{\cancel{(x-2)(x+2)}}\cdot 10\cdot\cancel{(x-2)(x+2)}-\frac{2,5\cdot x}{\cancel{5}\cdot\cancel{(x+2)}}\cdot{}^{2}\cancel{10}\cdot(x-2)\cancel{(x+2)}=-\frac{(x-1)}{\cancel{2}\cancel{(x-2)}}\cdot\cancel{10}^{5}\cdot\cancel{(x-2)}(x+2)$$

$$30x-5x(x-2)=-5(x-1)(x+2)$$

$$30x-5x^2+10x=-5\left(x^2-x+2x-2\right)$$

$$40x-5x^2=-5x^2-5x+10 \qquad |+5x^2+5x$$

$$45x=10 \qquad |:45$$

$$x=\tfrac{10}{45}=\tfrac{2}{9}$$

Da $\frac{2}{9}\in D \Rightarrow L=\left\{\frac{2}{9}\right\}$

24 $\frac{3x+1}{x+4}+\frac{3x-1}{3x-6}-\frac{4x^2}{x^2+2x-8}=0$

Faktorisierung der Nenner:

$3x-6=3(x-2)$

Versuch: $(x+4)(x-2)=x^2+4x-2x-8=x^2+2x-8$ $\boxed{=3.\text{ Nenner!}}$

$$\frac{3x+1}{x+4}+\frac{3x-1}{3(x-2)}-\frac{4x^2}{(x+4)(x-2)}=0 \qquad (1)$$

Daraus liest man den Definitionsbereich ab: $D=\mathbb{Q}\setminus\{-4\,;2\}$

Hauptnenner: $3\cdot(x+4)(x-2)$

Multiplikation von (1) mit dem HN:

$$\frac{3x+1}{\cancel{x+4}}3\cdot\cancel{(x+4)}(x-2)+\frac{3x-1}{\cancel{3}\cancel{(x-2)}}\cancel{3}\cdot(x+4)\cancel{(x-2)}-\frac{4x^2}{\cancel{(x+4)(x-2)}}3\cdot\cancel{(x+4)(x-2)}=0$$

$$3\cdot(3x+1)(x-2)+(3x-1)\cdot(x+4)-4x^2\cdot 3=0$$

$$3\left[3x^2+x-6x-2\right]+3x^2-x+12x-4-12x^2=0$$

$$-4x-10=0 \Leftrightarrow 4x=-10 \Leftrightarrow x=-\tfrac{5}{2}$$

Da $-\frac{5}{2}\in D \Rightarrow L=\left\{-\frac{5}{2}\right\}$